九十七學年度台北區

高級中學數學及自然科能力競賽

口試問題

問題一： 若方程式 $x^3+ax^2+432x+b=0$ 有三個質數根，試求 a,b？

【參考解答】

假設三根為 α,β,γ，由根與係數關係得 $432=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$。

i. 若 α,β,γ 皆為奇數，則 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ 亦為奇數；
ii. 若 α,β,γ 為兩奇一偶，則 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ 為奇數；
iii. 若 α,β,γ 皆為偶數，則 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ 亦為偶數；
iv. 若 α,β,γ 為兩偶一奇，則 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ 為偶數。

因此只有可能為 iii 或 iv 之情況。但質數除了 2 以外皆為奇數，所以

iii　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2\cdot2+2\cdot2+2\cdot2=12\neq432$ (不合)

iv　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2\cdot2+2\gamma+2\gamma=432\Rightarrow4\gamma=428\Rightarrow\gamma=107$

$a=-(2+2+107)=-111$；$b=-2\cdot2\cdot107=-428$

問題二： 若 $2x+y\geq1, u=y^2-2y+x^2+6x$，則 u 的最小值為多少？

【參考解答】

設 $2x+y=1+t$，其中 $t\geq0$，則原問題可轉化為：

直線 $2x+y=1+t$ 與 圓 $(x+3)^2+(y-1)^2=u+10$ 有公共點；

即 $\left|\dfrac{-6+1-1-t}{\sqrt{2^2+1}}\right|\leq\sqrt{u+10}\Rightarrow u\geq\dfrac{(t+6)^2}{5}-10\geq-\dfrac{14}{5}$。