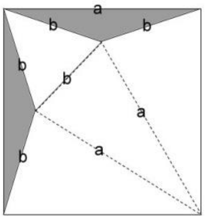
九十七學年度花蓮區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)【參考解答】

問題一： 如圖，將邊長為a的正方形剪去圖中的陰影部分，再沿圖中的虛線摺成一個正三角錐，其底面是邊長為b的正三角形，則 (1)a與b的關係式為何？ (2)正三角錐的高為何？



【解】

(1) $\cos 75^0 = \dfrac{\frac{b}{2}}{a} \Rightarrow b = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \cdot 2a = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} a$

(2)高為 $\sqrt{a^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3}b)^2} = \sqrt{a^2(1-\frac{2\sqrt{3}}{3})} = \sqrt{a^2\frac{1+\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3+3\sqrt{3}}}{3} a$

問題二： 設數列$\langle a_n \rangle$的每一項都是正數，S_n為前n項的和，且 $s_n{}^2 = a_1{}^3 + a_2{}^3 + \ldots + a_n{}^3$，$n = 1, 2, \ldots$，請導出此數列的一般項$a_n$，並證明之。

【解】

$$S_1 = a_1{}^2 = a_1{}^3 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$S_n{}^2 = a_1{}^3 + \ldots + a_n{}^3, S_{n-1}{}^2 = a_1{}^3 + \ldots + a_{n-1}{}^3 \Rightarrow$$

$$S_n{}^2 - S_{n-1}{}^2 = a_n{}^3 = (S_n + S_{n-1})(S_n - S_{n-1}) = a_n(2a_1 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n)$$

$$\therefore a_n{}^2 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n = 2S_n - a_n$$

$$a_{n-1}{}^2 = 2S_{n-1} - a_{n-1}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow a_n{}^2 - a_{n-1}{}^2 &= 2(S_n - S_{n-1}) - a_n + a_{n-1} \\ &= 2a_n - a_n + a_{n-1} \\ &= a_n + a_{n-1}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = 1$$

$$\Rightarrow a_n = n$$

問題三：已知 $(2x-1)^8-(ax+b)^8=(x^2+cx+d)^4$ 為恆等式，其中 $a>0$。試求實數 a,b,c,d 之值。

【解】

對 x 取特殊值，當 $x=\dfrac{1}{2}$ 時，有 $-(\dfrac{a}{2}+b)^8=(\dfrac{1}{4}+\dfrac{c}{2}+d)^4\geq 0$

$\therefore \dfrac{a}{2}+b=0\ldots(1)$　　$\dfrac{1}{4}+\dfrac{c}{2}+d=0\ldots(2)$

又取 $x=0$（即比較常數項係數），有 $1-b^8=d^4\ldots(3)$

比較 x^8 的係數(考慮特殊位置)，有 $2^8-a^8=1\cdots(4)$

由(4)得 $a=\sqrt[8]{2^8-1}=\sqrt[8]{255}$　代入(1)，得 $b=-\dfrac{\sqrt[8]{255}}{2}$

代入原式左邊，有

$$(2x-1)^8-(\sqrt[8]{255}x-\frac{\sqrt[8]{255}}{2})^8=256(x-\frac{1}{2})^8-255(x-\frac{1}{2})^8$$
$$=(x-\frac{1}{2})^8=(x^2-x+\frac{1}{4})^4$$

故知 $c=-1,d=\dfrac{1}{4}$ 。

也可以將 a,b 的值帶入(3)、(2) 求 d,c ，但要檢驗排除增根。