

九十七學年度高雄市

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(二)

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共五題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 4 分，第三題 4 分，第四題 4 分，第五題 4 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

一、已知 $a, b, c, d > 0$ ，

試證：
$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2} + \frac{c^3+d^3+a^3}{c^2+d^2+a^2} + \frac{d^3+a^3+b^3}{d^2+a^2+b^2} \geq a+b+c+d$$

二、設 p_1, p_2, \dots, p_{100} 為單位圓上的 100 等分點，求 $\sum_{k=2}^{100} p_1 p_k^2 = ?$

三、在邊長為 2 的正方形中任意取 5 個相異點，證明這些點中的距離最小者 $\leq \sqrt{2}$

四、如果正整數 x, y, z 滿足方程式 $x^2 + y^2 = z^2$ 且 x, y, z 兩兩互質。

證明：(1) z 是奇數； (2) x 和 y 之中有一個是 3 的倍數。

五、四角錐 $EARLY$ 其底部為一矩形 $EARL$ ，而頂點為 Y 。已知 $\overline{ER} = \sqrt{1105}$ ， $\overline{EY} \perp \overline{RY}$ 。

若 \overline{EA} ， \overline{AR} ， \overline{EY} ， \overline{AY} ， \overline{RY} ， \overline{LY} 的長均為相異正整數，試求此四角錐五個面中面積最小的一面其面積為何？