

九十七學年度高雄市
高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(一)

編號：_____

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時
- (2) 本試卷共五題，滿分 49 分。第一題 10 分，第二題 10 分，第三題 10 分，第四題 10 分，第五題 9 分，
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案卷一同繳回。

一、設 x, y, z 三數為實數且 $xyz \neq 0$ 。

試證：
$$\frac{x^2 + y^2}{3x^2 + 3y^2 + 2z^2} + \frac{y^2 + z^2}{3y^2 + 3z^2 + 2x^2} + \frac{x^2 + z^2}{3x^2 + 3z^2 + 2y^2} \leq \frac{3}{4}$$

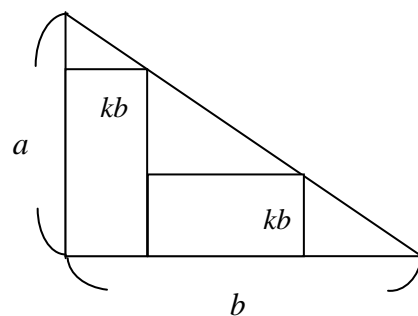
二、令 $T = T(a, b, c)$ 表三邊為 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{CA} = b$ 及 $\overline{AB} = c$ 的 $\triangle ABC$ ，且滿足

$0 < a \leq b \leq c$ 及 $a + b > c$ 。定義 $T = T(a, b, c)$ 的倒數為 $T^{-1} = T\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$ ，

若 T^{-1} 本身是一個三角形，則稱 T 為可逆。

證明：若 T 為可逆，則 $a > \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)c$ 。

三、如右圖，兩個全等之矩形置於一直角三角形內，並使其一長邊各與三角形之一股重合，設兩股長 a, b 可調整，又設矩形短邊長為 kb ，則 k 之最大值為何？



四、設 n 是奇數且 k 為大於 1 的正整數。

證明：(1) n^2 被 8 除餘 1； (2) n^{2^k} 被 2^{k+1} 除餘 1。

五、從 1 至 20 的數中任意選出 6 個數，此 6 個數中沒有包含連續整數，則此種選法共有多少種？