

九十七學年度嘉義區

高級中學數學及自然科能力競賽

數學科筆試(二)

編號：_____

(學生自填)

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共五題填充題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、將英文字 CALIFORNIA 的各字母作直線排列，若要求相同字母不相鄰，則有多少種排列方式？(4分)

二、設 $a_1 = 5$ 且對於大於 1 的正整數 n ， $a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ ，求無窮級數 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots$ 之和。(4分)

三、投擲一公正銅板 6 次，在投擲過程中曾經連續出現兩次正面的機率有多少？(4分)

四、通過球心的平面與球面相交所得的圓稱為該球面的大圓，而球面上任兩點 A, B 在球面上的最短距離恰為過 A, B 的大圓上的 AB 的弧長 (AB 的圓心角不超過 180°)。今設球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及 $A(1, 0, 0)$ ， $B(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$ ，試求出 S 上的點 C 使得 A, B, C 在球面 S 上形成正三角形 (即 A, B, C 中任兩點在球面上的最短距離皆相等)。(4分)

五、計算 $C_1^{2007} - C_3^{2007} + C_5^{2007} - C_7^{2007} + \cdots + C_{2005}^{2007} - C_{2007}^{2007}$ 之值。(5分)