

九十七學年度高屏區  
高級中學數學及自然科能力競賽  
數學科筆試(一)

編號：\_\_\_\_\_

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時
- (2) 本試卷共五題，滿分 49 分，第一題 10 分，第二題 10 分，第三題 10 分，第四題 10 分，第五題 9 分。
- (3) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4) 不可使用電算器。
- (5) 試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：已知三角形  $ABC$  之三邊長分別為  $a, b, c$ ，且其外接圓半徑為  $R$ ，若

$$R = \frac{a\sqrt{bc}}{b+c}, \text{ 試求 } \triangle ABC \text{ 的三內角之度數。}$$

[問題二]：試證：對任意的正整數  $n$ ， $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$  必為整數且是偶數。

[問題三]：試求方程組 
$$\begin{cases} ab+c+d=3 \\ bc+d+a=5 \\ cd+a+b=2 \\ da+b+c=6 \end{cases}$$
 的實數解  $a, b, c, d$ 。

[問題四]：已知  $\alpha$  為複數，且滿足  $|\alpha|=1$ ，試問當  $z$  是怎樣的複數時， $\frac{\alpha+z}{1+\alpha z}$  才會是實數？

[問題五]：已知  $a, b, c$  皆為正數，試證： $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a+b+c$ 。