# 九十七學年度高屏區

# 高級中學數學及自然科能力競賽

# 口試問題

**問題一：** 已知有$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{2008}$共有 2008 數，規定「運算一次」如下：消去其中二數$a,b$，再加入另一數$a+b+ab$，經過 2007 這樣的運算後只剩一數，試問此數為何？

【參考解答】

先考慮任意三數$a,b,c$經不同順序「運算一次」後所得結果是否相同？

（1） 先以$a$、$b$「運算一次」，則剩$c$與$a+b+ab$二數

其中$a+b+ab=(1+a)(1+b)-1$

再經「運算一次」後剩一數，得此數為

$c+[(1+a)(1+b)-1]+c[(1+a)(1+b)-1]=(1+a)(1+b)(1+c)-1$

（2） 同理以$b$、$c$「運算一次」，則剩$a$與$b+c+bc$二數

其中$b+c+bc=(1+b)(1+c)-1$

再經「運算一次」後剩一數，得此數為

$a+[(1+b)(1+c)-1]+a[(1+b)(1+c)-1]=(1+a)(1+b)(1+c)-1$

由（1）（2）可看出不論先以哪兩數先「運算一次」，最後結果皆同。

其次，再考慮四個$a,b,c,d$。

由上可知$a$、$b$、$c$運算後剩$(1+a)(1+b)(1+c)-1$

將此數在與$d$「運算一次」可得

$d+[(1+a)(1+b)(1+c)-1]+d[(1+a)(1+b)(1+c)-1]=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)-1$

由此可知原題$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{2008}$共有 2008 數，經 2007 運算後只剩一數，此數為

$$(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{2008})-1=\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{2009}{2008}-1=2009-1=2008$$

**問題二：**試求不等式$\log_3(x-1)<\log_9(13-6x)$之解集合

【參考解答】

$x-1>0 \Rightarrow x>1$ （1）

$13-6x>0 \Rightarrow 13>6x \Rightarrow 13>6x \Rightarrow x<\frac{13}{6}$ （2）

$$\log_3(x-1)<\log_9(13-6x) \Rightarrow \log_9(x-1)^2<\log_9(13-6x)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2<13-6x$$

$$\Rightarrow x^2+4x-12<$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+6)<0$$

$$\Rightarrow -6<x<2$$ （3）

（1）（2）（3）$\Rightarrow 1<x<2$

$\Rightarrow$其解集合為（1,2）