教育部九十六學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（二）【參考解答】

一、 **483840**。

將原有的 3 母音 I, U, O 分成兩組 V, V'，其中 V 含有兩個母音，V' 含有單一母音。（如 V=IU, $V'=$O 等）。排列 C, N, R, R, S, T, T, V, V' 共有 $C_2^9\times C_2^7\times 5!$ 種方法（先從 9 個位置中選取 2 個位置給 R, R。再從剩餘的 7 的位置中選取 2 個位置給 T, T，剩下的 5 相異物再作排列）。另外，V' 共有 3 種選擇，每一種選擇，V 有 2 種排列，所以總共有 $3\times 2\times C_2^9\times C_2^7\times 5!$ 種排列。然而，當三個母音連在一起時的情形會被重複計算。如 TIOUCRRTNS 可看成 T(IO)UCRRTNS 或 TI(OU)CRRTNS，所以，我們仍須扣除 3 個母音相連的情形。因此，最終答案為

$3\times 2\times C_2^9\times C_2^7\times 5!-3!\times C_2^8\times C_2^6\times 4!=544320-60480=483840$.

二、 **1003**。

$f(1-x)=\dfrac{3}{9^x+3}$ ，$f(x)+f(\ -k)=1$

$$\sum_{k=1}^{2006} f\left(\frac{k}{2007}\right)=\sum_{k=1}^{1003}\left(f\left(\frac{k}{2007}\right)+f\left(\frac{2007-k}{2007}\right)\right)=1003.$$

三、 **576**。

令 $R_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x\ge 0,\ y\ge 0,\ 0\le 3x^2+y^2<400\right\}$，則在 R_1 內格子點 (x,y) 為

x	y	數 目
0, 1, 2, 3	0, 1, $\cdots$, 19	80
4, 5	0, 1, $\cdots$, 18	38
6	0, 1, $\cdots$, 17	18
7	0, 1, $\cdots$, 15	16
8	0, 1, $\cdots$, 14	15
9	0, 1, $\cdots$, 12	13
10	0, 1, $\cdots$, 9	10
11	0, 1, $\cdots$, 6	7

共 197

令 $R_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le \ell\right\}$，則在 R_2 內格子點數為 $\dfrac{(\ell+1)}{2}(\ell+2)$。

因此區域 $R_1\setminus R_2$ 內有格子點數為 $\dfrac{(\ell+1)}{2}(\ell+2)-197$。所以在 R 內之格子點數為

$$4\left[\frac{(\ell+1)}{2}(\ell+2)-197\right]-7\left[\ell-2+\ell-1\right]=2\ell^2 \quad +2 \quad -7$$

ℓ 以 25 代入得 576。

四、 **-3**。

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+\tan\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\theta\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\left[1+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right]+\left[1+\tan\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right]+\left[1+\tan\theta\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right]-3$$

$$=\frac{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\frac{2\pi}{3}}+\frac{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-\tan\theta}{\tan\frac{\pi}{3}}+\frac{\tan\theta-\tan\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}{\tan\frac{\pi}{3}}-3$$

$$=-3.$$

五、 **36**。

兩隻紅色襪子的機率 $=\left(\dfrac{r}{r+b}\right)\left(\dfrac{r-1}{r+b-1}\right)=\dfrac{3}{5}$ …….(1)

作法 1：令 $b=2$， $r=1,2,3,\cdots$ 代入(1)式

$b=4$， $r=1,2,3,\cdots$ 代入(1)式

$b=6$， $r=1,2,3,\cdots$ 代入(1)式

$\vdots$

最後解得 $b=8$，$r=28$ 滿足(1)式。

作法 2： $\because\ \dfrac{r}{r+b}>\dfrac{r-1}{r+b-1}$ $\quad\therefore\ \left(\dfrac{r}{r+b}\right)^2>\dfrac{3}{5}>\left(\dfrac{r-1}{r+b-1}\right)^2$ for $r>1$,

最後可化簡成 $\dfrac{\sqrt{3}b}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}<r<\dfrac{\sqrt{3}b+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

$b=2$， $6.9<r<7.9$, $\quad r=7$, $\quad P=\dfrac{7}{12}$

$b=4$， $13.8<r<14.8$, $\quad r=14$, $\quad P=\dfrac{91}{153}$

$$b=6,\quad 20.8<r<21.7,\quad r=21,\quad P=\frac{70}{117}$$

$$b=8,\quad 27.7<r<28.7,\quad r=28,\quad P=\frac{3}{5}.$$

六、 $\left(\dfrac{m}{\mathbf{2}},\dfrac{m^2}{\mathbf{4}}\right)$。

令 $A\left(x_1,x_1^2\right),\ B\left(x_2,x_2^2\right),\ P\left(x,x^2\right)$ 且 $A_1\left(x_1,0\right),\ B_1\left(x_2,0\right),\ P_1\left(x,0\right)$

ΔPAB 面積令為 $f\left(x\right)$

$$f\left(x\right)=\square AA_1B_1B-\square AA_1P_1P-\square PP_1B_1B$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_2-x_1\right)-\frac{1}{2}\left(x_1^2+x^2\right)\left(x-x_1\right)-\frac{1}{2}\left(x^2+x_2^2\right)\left(x_2-x\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x_1-x_2\right)x^2+\left(x_2^2-x_1^2\right)x+\left(x_1^2x_2-x_1x_2^2\right)\right)$$

而 $x_1-x_2<0$， $f\left(x\right)$之拋物線開口朝下有最大值，此時

$$x=\frac{x_1^2-x_2^2}{2\left(x_1-x_2\right)}=\frac{x_1+x_2}{2},$$

A 點 $y=x_1^2\quad y=mx_1+b\quad x_1=\dfrac{1}{2}\left(m-\sqrt{m^2+4b}\right)$

B 點 $y=x_2^2\quad y=mx_2+b\quad x_2=\dfrac{1}{2}\left(m+\sqrt{m^2+4b}\right)$

故 P 點座標為$\left(\dfrac{m}{2},\dfrac{m^2}{4}\right)$.