# 教育部九十六學年度高級中學數學競賽

## 台中區複賽試題（一）【參考解答】

一、【解】

考慮一個內接正 $n$ 邊形，則其邊長 $\ell_n$ 小於 $\dfrac{2\pi}{n}$，使用邊作一正方形，則其面積小於 $\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)^2$ 且這些正方形的面積和小於 $\dfrac{(2\pi)^2}{n}$，因為當 $\ell_n$ 夠小時

$$\frac{\ell_n}{2} > 1-\sqrt{1-\left(\frac{\ell_n}{2}\right)^2}$$

因此 $A$ 被包括在這些正方形紙條聯集內。

二、【解】

$\overleftrightarrow{CD}$ 的方向向量為 $\vec{u}=(-1,-2,-1)$，而 $\overline{AB}=(-3,0,3)$ 和 $\vec{u}$ 垂直。設 $p(3+t,1+2t,2+t)$ 在 $\overleftrightarrow{CD}$ 上且 $\Delta PAB$ 面積最小，則由 $P, A, B$ 決定的平面 $E$ 和直線 $\overleftrightarrow{CD}$ 垂直。因此 $E$ 的法向量 $\overline{N}=\overline{PA}\times\overline{PB}=(-2-t,-2t,-t)\times(-5-t,-2t,3-t)=-6(t,-1-t,t)$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 的方向向量 $\vec{u}=(-1,-2,-1)$ 平行。即 $(t,-1-t,-t)=s(-1,-2,-1)$，$s$ 為某一實數。

解 $\begin{cases} t=-s \\ -1-t=-2s \end{cases}$ 得 $t=\dfrac{-1}{3}$。

因此 $P=\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{5}{3}\right)$。設 $Q$ 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 上一點，則 $Q=(1,1,2)+u(-3,0,3)=(1-3u,1,2+3u)$。

設 $\overleftrightarrow{PQ}\perp\overleftrightarrow{AB}$ 即 $\left(-\dfrac{5}{3}-3u,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}+3u\right)\cdot(-3,0,3)=0$ 得 $u=-\dfrac{1}{3}$。故 $Q=(2,1,1)$。因此

$\overline{PQ}=\left|\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{-2}{3},\dfrac{2}{3}\right)\right|=\dfrac{2}{3}\left|(1,-1,1)\right|=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 為 P 到 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離，而

$\overline{AB}=\left|(-3,0,3)\right|=3\sqrt{2}$。故 $\Delta PAB$ 面積最小為 $3\sqrt{2}\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{6}$。

三、【證明】

$\because \quad p \mid am^3+bm^2+cm+d$ 且 $d \nmid p$

$\therefore \quad p \nmid m$ i.e. $(p.m)=1$

$\Rightarrow$存在$\ell,\ n\in\mathbb{Z}$使得 $p\ell+mn=1$

令 $X=am^3+bm^2+cm+d$

則 $n^3X=a(mn)^3+bn(mn)^2+cn^2(mn)+dn^3$

$$=a(1-p\ell)^3+bn(1-p\ell)^2+cn^2(1-p\ell)+dn^3$$

$=dn^3+cn^2+bn+a+pt$ ，其中 $t\in\mathbb{Z}$

$\because \quad p \mid X,\ \therefore\ p \mid dn^3+cn^2+bn+a$ .

四、【證明】

令 $f(n)$ 表$1,2,\cdots,n$的排列$(\cdots a\cdots b\cdots c)$，且$a<c<b$不會出現。如果 $n$ 是在這樣一個排列的第 $i$ 位置（從左到右），則任何在 $n$ 左邊的數必大於任何在 $n$ 右邊的數。如果不是這樣，則存在某數 $x$ 在 $n$ 左邊和某數 $y$ 在 $n$ 右邊使得$x<y$。這樣一來$(\cdots x\cdots n\cdots y\cdots)$中就出現$x<y<n$，矛盾。由此可知$1,2,\cdots,n-i$在 $n$ 的右邊而 $n-i+1,\ n-i+2,\cdots,n-$ 在 $n$ 的左邊。在 $n$ 左邊的點可有 $f(n-i)$種排列，因此當 $n$ 在第 $i$ 個位置時有 $f(i-1)f(n-i)$ 種排列。因為 $i=1,2,\cdots,n$ ，所以 $f(n)=\sum_{i=1}^{n} f(i-1)\,f(n-i)$。其中我們取 $f(0)=1$，因 $f(1)=1,\ f(2)=2$ ，我們有

$$f(3)=f(0)\cdot f(2)+f(1)\cdot f(1)+f(2)\cdot f(0)=1\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1=5$$

$$f(4)=f(0)\cdot f(3)+f(1)\cdot f(2)+f(2)\cdot f(1)+f(3)\cdot f(0)=1\cdot 5+1\cdot 2+2\cdot 1+5\cdot 1=14$$

由此得 $f(9)=4862$。