臺北市九十六學年度

高級中學數學及自然學科能力競賽

數學科筆試（一）試題【參考解答】

問題一：

【參考解答】

(1) 設 $P(t^2,t)$ 是拋物線 $y^2=x$ 上一點，且拋物線 $y^2=x$ 在點 $P(t^2,t)$ 的法線通過點 $(a,0)$。

因為拋物線 $y^2=x$ 以點 $P(t^2,t)$ 為切點的切線方程式為 $ty=(1/2)(x+t^2)$，所以，拋物線 $y^2=x$ 在點 $P(t^2,t)$ 的法線方程式為

$$2tx+y=2t^3+t \text{ 。}$$

因為上述法線通過點 $(a,0)$，所以，可得

$$2at=2t^3+t \text{ ，}$$

$$t(2t^2-2a+1)=0 \text{ 。}$$

由此可知：

拋物線 $y^2=x$ 有三條法線通過點 $(a,0) \Leftrightarrow t(2t^2-2a+1)=0$ 有三個相異實數解

$$\Leftrightarrow 2a-1>0$$

$$\Leftrightarrow a>\frac{1}{2} \text{ 。}$$

(2)因為法線 $2tx+y=2t^3+t$ 的斜率為 $-2t$，所以，當拋物線 $y^2=x$ 有三條法線通過點 $(a,0)$ 時，此三法線的斜率分別為 0、$\sqrt{4a-2}$ 與 $-\sqrt{4a-2}$。因為斜率為 0 的直線與有斜率的直線都不垂直，所以，得

$$\text{有兩條法線互相垂直} \Leftrightarrow \sqrt{4a-2}\times(-\sqrt{4a-2})=-1$$

$$\Leftrightarrow \quad 4a-2=1$$

$$\Leftrightarrow \quad a=\frac{3}{4} \text{ 。} \|$$

問題二：

【參考解答】對每個正整數 n，令

p_n 表示 n 次"交換"後，甲袋中為一白球與一黑球的機率，

q_n 表示 n 次"交換"後，甲袋中為二黑球的機率，

r_n 表示 n 次"交換"後，甲袋中為二白球的機率。

顯然地，可知

$$p_1 = \frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\text{，}\quad q_1=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}\text{，}\quad r_1=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}\text{。}$$

對每個正整數 n，$n>1$，若 $n-1$ 次"交換"後甲袋中為一白球與一黑球，此時乙袋中為三白球與三黑球，則為使 n 次"交換"後甲袋中為一白球與一黑球，在 n 次"交換"中必須自甲、乙兩袋都取出黑球或自甲、乙兩袋都取出白球。此種情況的機率為

$$p_{n-1}\times(\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6})\text{。}$$

若 $n-1$ 次"交換"後甲袋中為二黑球，此時乙袋中為四白球與二黑球，則為使 n 次"交換"後甲袋中為一白球與一黑球，在 n 次"交換"中必須自乙袋取出白球。此種情況的機率為

$$q_{n-1}\times(1\times\frac{4}{6})\text{。}$$

若 $n-1$ 次"交換"後甲袋中為二白球，此時乙袋中為二白球與四黑球，則為使 n 次"交換"後甲袋中為一白球與一黑球，在 n 次"交換"中必須自乙袋取出黑球。此種情況的機率為

$$r_{n-1}\times(1\times\frac{4}{6})\text{。}$$

由此可得

$$\begin{aligned}p_n &= p_{n-1}\times(\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{6})+q_{n-1}\times(1\times\frac{4}{6})+r_{n-1}\times(1\times\frac{4}{6})=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{2}{3}r_{n-1}\\ &=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{2}{3}(q_{n-1}+r_{n-1})=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{2}{3}(1-p_{n-1})=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}p_{n-1}\text{。}\end{aligned}$$

令

$$p_n-[\frac{2}{3}-\frac{1}{6}p_{n-1}]=(p_n-x)-[-\frac{1}{6}(p_{n-1}-x)]\text{，}$$

可得 $x=4/7$。因此，由上述等式

$$p_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}p_{n-1}$$

可得

$$p_n-\frac{4}{7}=-\frac{1}{6}(p_{n-1}-\frac{4}{7})\text{ 。}$$

因為上式對每個大於 1 的正整數 n 都成立，所以，依歸納原理可得：對每個正整數 n，恆有

$$p_n-\frac{4}{7}=(-\frac{1}{6})^{n-1}(p_1-\frac{4}{7})\text{ ，}$$

$$p_n=\frac{4}{7}-(-\frac{1}{6})^{n-1}\times\frac{1}{14}\text{ ，}$$

$$p_{96}=\frac{4}{7}-(-\frac{1}{6})^{95}\times\frac{1}{14}\text{ 。}\|$$

問題三：

【證】在等腰三角形$\triangle CDB$ 中，因為$\angle CDB<\angle CMB=45^\circ$，所以，$\angle BCD>90^\circ$。於是，$\triangle CMB$(與$\triangle DME$) 是鈍角三角形。依鈍角三角形的SSA 全等定理，可知$\triangle CMB\cong\triangle DME$，$\overline{MB}=\overline{ME}$。於是，$\triangle MBE$ 是直角等腰三角形，$\overline{BE}$ 與$\overline{CD}$平行，$\overline{AM}$ 將$\overline{BE}$ 垂直平分於G 。

若 B 至直線 CD 的垂足為 F，則$\overline{BF}=\overline{GM}=\overline{BG}$。依直角三角形的SSA 全等定理，可知$\triangle BCF\cong\triangle BAG$。於是，$\angle FBC=\angle ABG$ ，$\angle ABC=\angle FBG=90^\circ$。$\|$

問題四：

【參考解答】首先，將原式變形如下：

$$\begin{aligned}&9\sec^2\theta+4\csc^2\theta+12\sec\theta\csc\theta\\&=9(\tan^2\theta+1)+4(\cot^2\theta+1)+12(\tan\theta+\cot\theta)\\&=13+(9\tan^2\theta+6\cot\theta+6\cot\theta)+(4\cot^2\theta+6\tan\theta+6\tan\theta)\text{ 。}\end{aligned}$$

依算幾不等式，可得

$$9\tan^2\theta+6\cot\theta+6\cot\theta\geq 3\sqrt[3]{9\tan^2\theta\times 6\cot\theta\times 6\cot\theta}=9\sqrt[3]{12}\text{ ，}$$

$$4\cot^2\theta+6\tan\theta+6\tan\theta\geq 3\sqrt[3]{4\cot^2\theta\times 6\tan\theta\times 6\tan\theta}=6\sqrt[3]{18}\text{ 。}$$

由此可知

$$9\sec^2\theta+4\csc^2\theta+12\sec\theta\csc\theta\geq 13+9\sqrt[3]{12}+6\sqrt[3]{18}\text{ 。}$$

因為

$$9\sec^2\theta+4\csc^2\theta+12\sec\theta\csc\theta=13+9\sqrt[3]{12}+6\sqrt[3]{18}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9\tan^2\theta + 6\cot\theta + 6\cot\theta = 3\sqrt[3]{9\tan^2\theta \times 6\cot\theta \times 6\cot\theta} \\ 4\cot^2\theta + 6\tan\theta + 6\tan\theta = 3\sqrt[3]{4\cot^2\theta \times 6\tan\theta \times 6\tan\theta} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9\tan^2\theta = 6\cot\theta \\ 4\cot^2\theta = 6\tan\theta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \tan^3\theta = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \tan\theta = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \text{，}$$

所以，可知$9\sec^2\theta + 4\csc^2\theta + 12\sec\theta\csc\theta$在$\theta = \tan^{-1}\sqrt[3]{2/3}$時有最小值，其值為

$13 + 9\sqrt[3]{12} + 6\sqrt[3]{18}$ 。 ‖