

臺北市九十六學年度
高級中學數學及自然學科能力競賽
數學科筆試（一）試題

編號：_____（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一：設 P 為平面曲線 Γ 上一點。若直線 L 是曲線 Γ 以 P 點為切點的切線，則過 P 點而與切線 L 垂直的直線稱為曲線 Γ 在切點 P 的法線。

(1) 試討論實數 a 的範圍，使得拋物線 $y^2 = x$ 有三條法線通過點 $(a, 0)$ 。(7 分)

(2) 試求實數 a 的值，使得拋物線 $y^2 = x$ 有三條法線通過點 $(a, 0)$ ，而且其中有兩條法線互相垂直。(6 分)

問題二：設甲、乙兩袋中各有球若干個。對於這兩袋球，下面的動作稱之為“交換”：分別自甲、乙兩袋中同時取出一球，接著將甲袋球放入乙袋、乙袋球放入甲袋。若甲袋中原有一白球與一黑球，乙袋中原有三白球與三黑球，則經過 96 次“交換”後，甲袋中仍有一白球與一黑球的機率為何？(12 分)

問題三：在凸五邊形 $ABCDE$ 中，若 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EA}$ ，而且 \overline{CD} 的中點 M 滿足 $\angle CMB = \angle DME = 45^\circ$ ，試證： $\angle ABC$ 是直角。(12 分)

問題四：設 θ 為銳角，試求 $9\sec^2\theta + 4\csc^2\theta + 12\sec\theta\csc\theta$ 的最小值。(12 分)