九十六學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（二）

【參考解答】

［問題一］：**【參考解答】**

$$
\begin{aligned}
&(\log_a bc)^r+(\log_b ca)^r+(\log_c ab)^r \ge 3\cdot\sqrt[3]{(\log_a bc)^r\cdot(\log_b ca)^r\cdot(\log_c ab)^r}\\
&=3\cdot(\log_a b+\log_a c)^{r/3}\cdot(\log_b c+\log_b a)^{r/3}\cdot(\log_c a+\log_c b)^{r/3}\\
&\ge 3\cdot 2^{r/3}(\log_a b\cdot\log_a c)^{r/6}\cdot 2^{r/3}(\log_b c\cdot\log_b a)^{r/6}\cdot 2^{r/3}(\log_c a\cdot\log_c b)^{r/6}\\
&=3\cdot 2^r
\end{aligned}
$$

［問題二］：**【參考解答】**

令 $p(x)=x^3-x-3$ ，$\because \frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\frac{\beta-1}{\beta+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}=3-2\times(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1})$

$\therefore \alpha+1,\beta+1,\gamma+1$ 為方程式 $p(x-1)=(x-1)^3-(x-1)-3=x^3-3x^2+2x-3$ 的三個根，因此

$\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\frac{\beta-1}{\beta+1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}=3-2\times(\frac{1}{\alpha+1}+\frac{1}{\beta+1}+\frac{1}{\gamma+1})=3-2\times\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$ 。

［問題三］：**【參考解答】**

$\because 5b^2+(5a-14)b+5a^2-7a=0$ 有整數解 b ，

$\therefore b=\dfrac{14-5a\pm\sqrt{(5a-14)^2-20(5a^2-7a)}}{10}=\dfrac{14-5a\pm\sqrt{196-75a^2}}{10}$

又　$196-75a^2\ge 0\Rightarrow a^2\le\frac{196}{75}\Rightarrow -\frac{14\sqrt{3}}{15}\le a\le\frac{14\sqrt{3}}{15}\Rightarrow a=-1,0,1$

故解為 $(a,b)=(-1,3),(0,0),(1,2)$

［問題四］：**【參考解答】**

利用關係式 $\Delta=\frac{1}{2}a\times 6=\frac{1}{2}b\times 4=\frac{1}{2}c\times 3$

解得　$\cos A=\frac{7}{8}\ \longrightarrow\ \sin A=\frac{\sqrt{15}}{8}$ ；再得　$\Delta=\frac{48}{\sqrt{15}}$　及　$a=\frac{16}{\sqrt{15}}$ 。

［問題五］：**【參考解答】**

∵ $xyz+xy+yz+zx=(x+1)(y+1)(z+1)-(x+y+z)-1$

令 $x+1=p$ 、 $y+1=q$ 、 $z+1=r$

則 $xyz+xy+yz+zx=pqr-11$

又 $p+q+r=x+y+z+3=13$

使得 pqr 最大的 (p,q,r) 為 $(4,4,5)$ 或 $(4,5,4)$ 或 $(5,4,4)$

∴ $xyz+xy+yz+zx$ 之最大值為 69。

【口試題】

1.若 x、y、z、k 皆為整數且滿足方程式 $x^2+y^2+z^2=k^2$ ，

則 x、y 中至少有一個是偶數。

2.設方程式 $x^3-x^2-x-1=0$ 的三根為 α 、 β 、 γ ，

試證：α 、 β 、 γ 必兩兩皆不相同。