

九十六學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（二）

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共五題，滿分 21 分，第一題 4 分，第二題 4 分，第三題 4 分，第四題 4 分，第五題 5 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：設實數 $a > 1, b > 1$, 且 $c > 1$ 。試證：對任意實數 r ，則下列不等式恆成立：

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3 \cdot 2^r。$$

[問題二]：已知 α, β, γ 為方程式 $x^3 - x - 3 = 0$ 的三個根，試求 $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \frac{\beta-1}{\beta+1} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ 之值。

[問題三]：設 a, b 為整數，試求滿足方程式 $7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2$ 的所有解 (a, b) 。

[問題四]：若 $\triangle ABC$ 的三個高 h_a, h_b, h_c 其長度分別為 6、4、3，試求 $\triangle ABC$ 最短邊的長度。

[問題五]：設 x, y, z 均為非負整數，且 $x + y + z = 10$ 。
試問 $xyz + xy + yz + zx$ 之最大值為何？