九十六學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（一）

【參考解答】

［問題一］：**【參考解答】**

在等式 $2\sin A+\cos A=2$ 左右兩邊同乘 bc 得 $4\Delta+\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=2bc$ ，再分別以 $a=x$，$b=x+1$，$c=x+2$，以及 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$（其中 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$）代上式。得解 $x=3$。

［問題二］：**【參考解答】**

因為 n 為正整數，且 p 為質數，

$\because n\mid p-1 \quad \therefore n<p \because p\mid n^3-1$。又 $n^3-1=(n-1)(n^2+n+1)$ 且 $n<p \Rightarrow p\nmid n-1$

$\therefore p\mid n^2+n+1 \Rightarrow n^2+n+1=p$ 或 $p\mid n^2+n+1$，$n^2+n+1>p$

（1）若 $n^2+n+1=p$

$4p-3=4n^2+4n+4-3=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$【得證】。

（2）若 $p\mid n^2+n+1$，且 $n^2+n+1>p$，$\because n\mid p-1$

設 $p-1=nt$，$t\in N \Rightarrow p=nt+1$

$$\begin{cases} nt+1\mid n^2+n+1 \\ nt+1\mid nt+1 \end{cases} \Rightarrow p=nt+1\mid n^2+n-nt$$

又 $n^2+n-nt=n(n+1-t)$ 且 $n<p$、$n+1-t<p$

$\Rightarrow p\nmid n$、$p\nmid n+1-t$【矛盾】。故 $n^2+n+1=p$，且 $4p-3$ 必為某整數的完全平方。

［問題三］：**【參考解答】**

因為 O,H 分別為外心、垂心，所以有 $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$。

$\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\therefore \angle C=75^\circ$

$\angle AOB=150^\circ$，$\angle AOC=120^\circ$ $\therefore \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4\cdot4\cdot\cos150^\circ=-8\sqrt{3}$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0, \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=4\cdot4\cdot\cos120^\circ=-8$

$\left|\overrightarrow{OH}\right|^2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

$=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|+\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+2\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\right)=32-2\sqrt{192}=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$

［問題四］：**【參考解答】**

由於 $x^2-x-1=0$ 有二解 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ，

所以 α,β 必為 $ax^{17}+bx^{16}+1=0$ 的解，即 $a\alpha^{17}+b\alpha^{16}=-1,a\beta^{17}+b\beta^{16}=-1,$

將第一式乘以 β^{16} ，減去第二式乘以 α^{16} ，利用 $\alpha\beta=-1$ ，得到

$$a=\frac{\alpha^{16}-\beta^{16}}{\alpha-\beta}=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha^8+\beta^8)$$

又 $\alpha+\beta=1,\alpha^2+\beta^2=3,\alpha^4+\beta^4=7,\alpha^8+\beta^8=47,\therefore a=987$ 。

［問題五］：**【參考解答】**

因為 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ ，

兩邊同除以 x^2 得到: $x^2+ax+b+a\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

令 $x+\dfrac{1}{x}=t,x^2+ax+b+a\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=t^2+at+(b-2)=0$

至少有一實數解且 $t=x+\dfrac{1}{x}$ 的範圍為 $|t|\geq 2$ 。

由判別式得; $a^2-4(b-2)\geq 0$ ------(1)

又 t 為方程式的解且 $|t|\geq 2,$ 得 $\left|\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4(b-2)}}{2}\right|\geq 2$ ---(2)

整理(2) 得 $2a+b-2\leq 0$ 或 $-2a+b-2\leq 0$ ---(3)

由(1),(3)得知: a^2+b^2 的最小值為原點至直線 $\pm 2a+b+2\leq 0$ 的直線距離平方

$=(\dfrac{\sqrt{5}}{2})^2=\dfrac{5}{4}$ ，由上得知 a^2+b^2 有最小值 $\dfrac{5}{4}$

【另解】

因為 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ ，所以 $x^2+ax+b+a\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$ （$\because x\neq 0$ ）

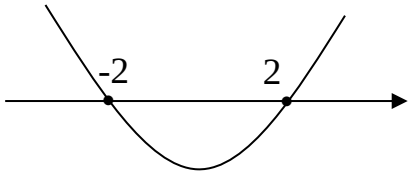
令 $t=x+\dfrac{1}{x}\ \Rightarrow t^2+at+b-2=0$

（1）$\because$ 方程式有實數解 $\therefore D\geq 0\Rightarrow a^2-4(b-2)\geq 0$ —①

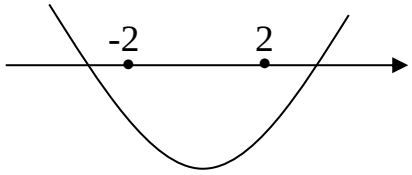
（2）令 $f(t)=t^2+at+b-2$ $\because t=x+\dfrac{1}{x}$ 有實數解即 $x^2-tx+1=0$

$\therefore D \geq 0 \Rightarrow t^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq 4 \Rightarrow t \geq 2$ 或 $t \leq -2$ 。

又 $f(t) = t^2 + at + b - 2$ 有實數解，故 $y = f(t)$ 的圖形與 x 軸交點為



或



$\Rightarrow f(2) \leq 0$ 或 $f(-2) \leq 0$

$f(2) = 4 + 2a + b - 2 \leq 0 \Rightarrow 2a + b \leq -2$ —②

$f(-2) = 4 - 2a + b - 2 \leq 0 \Rightarrow 2a - b \geq 2$ —③

（3）由①②③，故 $a^2 + b^2$ 的最小值為原點至斜線部分的最短距離的平方

$$= \left(\frac{|0+0+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$