

九十六學年度台南區高級中學數學科能力競賽試題（一）

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時
- (2)本試卷共五題，滿分 49 分，第一題 10 分，第二題 10 分，第三題 10 分，第四題 10 分，第五題 9 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：若 $\triangle ABC$ 之三邊長分別為 $\overline{BC} = x$ ， $\overline{CA} = x+1$ ， $\overline{AB} = x+2$

且滿足 $2\sin A + \cos A = 2$ ；試求 x 之值。

[問題二]：已知 n 為正整數， p 為質數，且滿足條件 $n \mid p-1$ 與 $p \mid n^3-1$ ，試證： $4p-3$ 必為某整數的完全平方。

[問題三]：設 O, H 分別為 $\triangle ABC$ 的外心與垂心，已知 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 4， $\angle A = 45^\circ$ ，及 $\angle B = 60^\circ$ ，試求 \overline{OH} 的長度。

[問題四]：設 a, b 為異於零的整數，如果多項式 $ax^{17} + bx^{16} + 1$ 能被 $x^2 - x - 1$ 所整除，試求 a 值。

[問題五]：設 a, b 為實數，如果方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ 至少有一個實數解，試求 $a^2 + b^2$ 的最小可能值。