台灣省新竹區九十六學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科甄選試題【參考解答】

一、【參考解答】

因 $240=2^4\times3\times5$，故 $p=(1+2+3+4)\cdot2\cdot2=40, q=r=5\cdot2=10$；得 $p+q+r=60$。

二、【參考解答】

因 $1=(7n^2+44,2n^2+13)=(n^2+5,2n^2+13)=(n^2+5,3)=(n^2+2,3)$，故 n 必為 3 的倍數；因此，有 $\left[\frac{200}{3}\right]-\left[\frac{100}{3}\right]=33$ 個正整數 n 滿足所求。

三、【參考解答】

$\left[\frac{12345}{7+1}\right]+1=1544$。

四、【參考解答】

由 $y=\frac{2\sin x}{\cos x+2}$，得 $2y=2\sin x-y\cos x=\sqrt{4+y^2}\sin(x+\theta)$。故 $4y^2\le4+y^2$，得 $y\le\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

五、【參考解答】

此題即求函數 $y=\log x$ 上之點到 $A(0,0)$ 與 $B(4,-6)$ 之距離和的最小值，但因 $A(0,0)$ 與 $B(4,-6)$ 在函數 $y=\log x$ 的相反兩側，故所求最小值為 $\overline{AB}=2\sqrt{13}$。

六、【參考解答】

令 $\overline{AC}=x$, 由餘弦定理得 $49=25+x^2-2\cdot5\cdot x\cdot\cos60^{\circ}=25+x^2-5x$，即 $x^2-5x-24=0$，解得 $x=8$ 或 $x=-3$（不合）。故 ΔABC 的面積為 $\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin60^{\circ}=10\sqrt{3}$。

七、【參考解答】

利用 $5,6,7$ 是 $\frac{a}{x}+\frac{b}{x+3}+\frac{c}{x+6}=1$ 的三根，即 $x^3+(9-a-b-c)x^2+px+q=0$，

故可由根與係數關係，得三根和 $18=-9+(a+b+c)$，故 $a+b+c=27$。