

台灣省第二區九十六學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(二)試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分 21 分。

考試時間：1 小時。

試題及計算紙必須連同答案卷交回。

將答案填寫在答案欄內。

1. 一圓直徑 $\overline{AB} = 2r$ ， P 為圓周上一點，則 $3\overline{AP} + 4\overline{BP}$ 的最大值為 _____ (一)。
2. 設 $f(x) = 2\sin^2 x + 2\sin x + 1$ ， $g(x) = 2\sin^2 x + k(1 + \sin x) - 1$ ，若兩函數 $y = f(x)$ ， $y = g(x)$ 的圖形在 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 至少有一個交點，則實數 k 的範圍為 _____ (二)。
3. 設三角形的三頂點坐標為 $A(a, 0)$ ， $B(b, 0)$ ， $C(0, c)$ ，則 $\triangle ABC$ 內接矩形對角線交點的軌跡方程式為 _____ (三)。
4. 已知正項數列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的前 n 項和 S_n 滿足 $6S_n = a_n^2 + 3a_n + 2$ 。若 a_2, a_4, a_8 恰成等比數列，則 $a_n =$ _____ (四)。
5. 設 O 為拋物線 $y^2 = 4x$ 的頂點。若 A 、 B 是拋物線上的兩個動點， $A \neq O$ 、 $B \neq O$ 且 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ ，則 \overline{AB} 中點 P 的軌跡方程式為 _____ (五)。
6. 設 k 為一常數且二次方程式 $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 52x - 56y + k = 0$ 的圖形為一點，亦即：滿足此二元二次方程式的實數對恰有一組，則此點的坐標為 _____ (六)。
7. 有 100 人參加某次考試，考試題目共 4 題，各題的答對人數如下表：

題 號	一	二	三	四
答對人數	51	68	91	78

若答對 3 題或以上為「通過」，依此推算本次考試的通過人數最少 x 人、最多 y 人，則數對 $(x, y) =$ _____ (七)。