台灣省第二區九十六學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)【參考解答】

問題一：

【參考解答】因為$[x^3]=4x+3$，所以$4x$必須是整數.

不妨設$x=\dfrac{k}{4}$，$k\in N$.

$$\Rightarrow \quad 3\le \frac{k^3}{64}-k<4,$$

$$\Rightarrow \quad 192\le k(k-8)(k+8)<256. \qquad (1)$$

這表示$(k-8)$，k，$(k+8)$三數中恰有兩個小於 0,

或三數都大於 0,

所以$-7\le k\le -1$或$k\ge 9$.

令$f(k)=k(k-8)(k+8)$，則當$k\ge 10$時，$f(k)\ge 256$，不合；所以

$$k\in\{-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,9\}.$$

將這些k分別代入(1)式，易知僅當$k=-4$，-5符合所求,

所以$x=-\dfrac{5}{4}$或-1。

問題二：

【參考解答】設S_n表排列數，則$S_1=0$, $S_2=1$

若$a_n=96$，則這種排列數$(a_1, a_2, \cdots, a_{95}, 96)$有$S_{95}$個

若$a_i=96$，$1\le i\le 95$

$(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, 96, a_{i+1}, \cdots, a_n)$，所以有$\dbinom{95}{i-1}$

$$\therefore S_{96}=S_{95}+\sum_{i=1}^{95}\binom{95}{i-1}=S_{95}+2^{95}-1$$

$$\therefore S_{96}=(2^{95}-1)+(2^{94}-1)+\cdots+(2^{2}-1)+(2-1)=2^{96}-95$$

問題三：

【證明】令$y=x^n$，$f(y)=1+x^n+x^{2n}+\cdots+x^{mn}=\dfrac{y^m-1}{y-1}=\dfrac{(x^{m+1})^n-1}{x^n-1}=f(x)$

$$g(y)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{m+1}-1}{x-1}$$

$$\therefore \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^{m+1})^n - 1}{x^n - 1} \times \frac{x-1}{x^{m+1}-1} \text{ 為多項式}$$

$$\Leftrightarrow (x^{m+1}-1,\ x^{n+1}-1) = x-1 \quad (\because x^n - 1 \mid (x^{m+1})^n - 1 \text{ and } x^{m+1}-1 \mid (x^{m+1})^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow (m+1, n) =$$

問題四：

【證明】設直線 BP 與圓 O_1 交於點 E、直線 CP 與圓 O_2 交於點 F、直線 BF 與直線 CE 交於點 D。因為 $\overline{PE}$ 是圓 O_1 的直徑，所以，$\angle PCE = \angle PAE = 90^\circ$。因為 $\overline{PF}$ 是圓 O_2 的直徑，所以，$\angle PBF = \angle PAF = 90^\circ$。因為 $\angle PCE = \angle PBF = 90^\circ$，所以，點 P 是$\triangle DEF$ 的垂心。

因為 $\angle PAE + \angle PAF = 180^\circ$，所以，點 A 在 $\overline{EF}$ 上。因為點 P 是$\triangle DEF$ 的垂心而 $\overline{AP} \perp \overline{EF}$，所以，直線 AP 通過$\triangle DEF$ 的頂點 D。因為 $\angle PBD = \angle PCD = 90^\circ$，所以，點 D 在圓 PBC 上且 $\overline{DP}$ 是圓 PBC 的直徑。