

台灣省第二區九十六學年度  
高級中學數學及自然科能力競賽  
數學科筆試(一)試題

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】：設  $[x]$  表示不大於  $x$  的最大整數，試求所有可能的實數  $x$  使得  $[x^3] = 4x + 3$ 。  
(12 分)

【問題二】：在  $1, 2, \dots, 96$  的直線排列  $(a_1, a_2, \dots, a_{96})$  中，滿足下列條件(\*)的排列共有幾個？

$$(*) \text{ 恰有一個 } i \in \{1, 2, \dots, 95\} \text{ 使得 } \begin{cases} a_1 < a_2 < \dots < a_i \\ a_i > a_{i+1} \\ a_{i+1} < a_{i+2} < \dots < a_{96} \end{cases} \text{ 成立。 (12 分)}$$

【問題三】：設  $m, n$  為正整數，且  $1 + x^n + x^{2n} + \dots + x^{mn}$  被  $1 + x + x^2 + \dots + x^n$  整除，試證：  
 $m+1$  與  $n$  互質。(12 分)

【問題四】：設兩圓  $O_1, O_2$  交於兩相異點  $A$  與  $P$ ，若連接點  $P$  與圓心  $O_1$  的直線交圓  $O_2$  於另一點  $B$ ，連接點  $P$  與圓心  $O_2$  的直線交圓  $O_1$  於另一點  $C$ ，試證：直線  $AP$  通過  $\triangle PBC$  的外接圓圓心。(13 分)

