

台灣省第一區九十六學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題卷

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一： 設 k 為正整數， $a_k = \frac{1}{k} - \frac{4}{(k+1)^2}$ ，試求數列 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 之最大項。
(16 分)

問題二： 試求所有滿足下列條件的實數 a ：不論 x 為任何實數，不等式
 $9\cos^2 x + 6(a+1)\sin x + 8a^2 \geq 2a + 10$ 恆成立。
(16 分)

問題三： 設 p 為奇質數， n 為正整數。試證：若整數 a 與 $2p^n$ 互質，則至多只
有一個正整數 x_0 ，滿足 $0 < x_0 < p^n$ 且 $x_0^2 + a$ 是 $2p^n$ 的倍數。
(17 分)