九十六學年度高雄市高級中學數學科能力競賽試題（二）

【參考解答】

1.【參考解答】

令 $\left|\overline{PD}\right|=\left|\overline{PE}\right|=\left|\overline{PF}\right|=d$

$\because\ \dfrac{\Delta BPC}{\Delta BAC}=\dfrac{d}{d+\alpha}$ ， $\dfrac{\Delta CPA}{\Delta CBA}=\dfrac{d}{d+\beta}$ ， $\dfrac{\Delta APB}{\Delta ACB}=\dfrac{d}{d+\gamma}$

又 $\Delta BPC+\Delta CPA+\Delta APB=\Delta ABC$

$\therefore$ 得 $\dfrac{d}{d+\alpha}+\dfrac{d}{d+\beta}+\dfrac{d}{d+\gamma}=1$

通分母整理得 $2d^3+(\alpha+\beta+\gamma)d^2-\alpha\beta\gamma=0$

解得 $\alpha\beta\gamma=441$。

2.【參考解答】

過 C 作平行 $\overline{DA}$ 直線交 $\overline{AB}$ 於 P ，

解得梯形 $ABCD$ 之高為 $\dfrac{60}{13}$ 。

梯形面積＝$\dfrac{1}{2}(39+52)\times\dfrac{60}{13}=210$ 。

3.【參考解答】

1/99 = 1/3 * 3/6 * 6/9* … * 93/96 * 96/99 < 1/3 * 4/6 * … * 97/99。

Let A = 1/3 * 4/6 * 7/9 *… * 94/96 *97/99 and
B = 3/4 * 6/7 * 9/10 * … * 96/97 * 99/100.

We have that A < B.

Then A*A < A*B = 1/100. We can only get A < 1/10.

In order to get A < 1/15, we need to decrease the item 3/4 in B to 1/3.

Now, let C = 1/3 * 6/7 * 9/10 * … * 96/97 * 99/100.

We have that A < C.

Hence A*A < A*C = 1/3 * 4/6 * 7/9 * … * 94/96 * 97/99 *
1/3 * 6/7 * 9/10*…* 96/97* 99/100
= 1/3 * 4 * 1/3 * 1/100 = 4/900 = 1/225

Therefore A*A < 1/225 = (1/15)*(1/15), i.e., A < 1/15.

4.【參考解答－法 1】

令 $x+y+z=0$ ....（1）

$3x+y+z=0$ ....（2）

$4x+dy+2z+e=0$ ....　（3）

設所共之線的方向數為（a,b,c）..................　（4）

（1）（4）$\Rightarrow 0=(3,1,1)\bullet(a,b,c)=3a+b+c$ ....（5）

（2）（4）$\Rightarrow 0=(1,1,1)\bullet(a,b,c)=a+b+c$ ....（6）

（3）（4）$\Rightarrow (4,d,2)\bullet(a,b,c)=4a+bd+2c$ ....（7）

（5）（6）$\Rightarrow 2a=0\Rightarrow a=0$ ....　　（8）

（5）（6）（7）（8）$\Rightarrow b+c=0$........................　（9）

$bd+2c=0$ ....（10）

（9）$\Rightarrow b=-c$ ....（11）

（10）（11）$\Rightarrow 0=(-c)d+2c=c(2-d)$

$\Rightarrow c=0$ 或 $2=d$ ....　（12）

若 $c=0$ 則（11）$\Rightarrow b=0$ 知（a,b,c）＝（0,0,0）無意義。

故 $c\neq 0\Rightarrow 2=d$

（11）（8）$\Rightarrow$ 方向數（a,b,c）＝（0,－c,c）

以（0,－1,1）代之，則（1）（2）$\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$ ....（13）

（3）（12）$\Rightarrow 4x-2x+e=0$ ....　（14）

（13）（14）$\Rightarrow e=0$ ....（15）

（14）（15）$\Rightarrow d+e=2+0=2$

【法 2】：令 $k(3x+y+z)+(x+y+z)=0$

$\Rightarrow k(3k+1)x+(k+1)y+(k+1)z=0$ 與 $4x+dy+2z+e=0$ 比較係數得 $d=0$、

$3k+1=4$...　　　（1）

$\Rightarrow k=1$...........（2）

（1）（2）$\Rightarrow d+e=2$。

5.【參考解答】

$x^2+4y^2+9z^2-4xy+\alpha yz+\beta xz-28=0$ ....（1）

1　　－2　　3

1　　－2　　3

（1）$\Rightarrow 0=\left[\left(x-2y+3z\right)+d_1\right]\left[\left(x-2y+3z\right)+d_2\right]$

$=\left(x-2y+3z\right)^2+\left(d_1+d_2\right)\left(x-2y+3z\right)+d_1d_2$ ……………… （2）

（1）（2）$\Rightarrow d_1+d_2=0$ ………………………………………… （3）

$d_1d_2=-28$ ………………………………………… （4）

$\alpha=-12$, $\beta=6$ ………………………………… （5）

（3）$\Rightarrow d_1=-d_2$ ………………………………………………… （6）

（4）（6）$\Rightarrow d_1^2=28\Rightarrow d_1=\pm 2\sqrt{7}$

令 $d_1=2\sqrt{7}$ ，$d_2=-2\sqrt{7}$ 則此二平面分別為 $x-2y+3z+2\sqrt{7}=0$ 、

$x-2y+3z-2\sqrt{7}=0$

$\Rightarrow$此二平行平面之距離$=\dfrac{\left|2\sqrt{7}-\left(-2\sqrt{7}\right)\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=2\sqrt{2}$

（5）$\Rightarrow \alpha+\beta=-6$