教育部九十六學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（二）【參考解答】

一、【解】

$$a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\Delta=a^2+b^2+\left(a^2+b^2-2ab\cos C\right)-4\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$=2\left[a^2+b^2-2ab\sin(C+\frac{\pi}{6})\right]$$

$$\geq 2\left(a-b\right)^2\geq ($$

又 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$$=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\left(1-\cos^2 C\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}\left(\cos 2A+\cos 2B\right)+\left(1-\cos^2 C\right)$$

$$=2-\cos\left(A+B\right)\cos\left(A-B\right)-\cos^2 C$$

$$=2+\cos C\cos\left(A-B\right)-\cos^2 C\leq\frac{9}{4}$$

（ $\cos C\cos\left(A-B\right)-\cos^2 C\leq\cos C-\cos^2 C\leq\frac{1}{4}$ ）

$$\therefore\quad\frac{a^2+b^2+c^2}{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C}\geq\frac{4\sqrt{3}}{\frac{9}{4}}=\frac{16\sqrt{3}}{9}$$

二、【解】

(1) 有，例如：6、8、10。

$6=2\times 3<35$，6 的正因數個數和 35 的正因數個數一樣。

(2) $n=2k+1$ (奇數)$=3^{a_1}\cdot 5^{a_2}\cdot 7^{a_3}\cdot\ldots\cdot {n_p}^{a_p}$

$a_i\geq 0$，$\forall i=1\sim p$，$a_p\neq 0$

Let $m=2^{a_p}\cdot 3^{a_1}\cdot 5^{a_2}\cdot\ldots\cdot(n_{p-1})^{a_{p-1}}$

$\Rightarrow d(m)=d(n$

$\because\ \frac{n}{m}=\frac{{n_p}^{a_p}}{2^{a_p}}=(\frac{n_p}{2})^{a_p}>1$

$\therefore n>m$

$\therefore n$ 不是高合成數

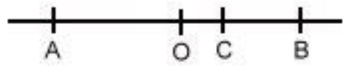
三、【解】

將 S 分成五堆：$\{1,9\}, \{2,8\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{5\}$，由鴿籠原理知由 S 中取 6 個元素必有二個元素落在相同的子集中，則此二個元素的和為 10。

四、【證】

先證：設線段 AB 上任一點 C, AB 的中點 O，則 $(AC)^2+(CB)^2=2\left[(AO)^2+(OC)^2\right]$

證，設 C 在 OB 之間，則



$AC = AO + OC$

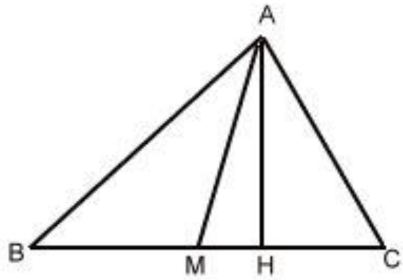
$BC = OB - OC,\quad OB = A$

$(AC)^2+(CB)^2=2\left[(AO)^2+(OC)^2\right]$

再證中線定理：若 AM 為 ΔABC 中線，則

$(AB)^2+(AC)^2=2\left(AM^2+BM^2\right)$

證：由點 A 向 BC 作垂線其垂足 H，則



$\overline{AB}^2=(AH)^2+(BH)^2$

$=(AM)^2 + (BH)^2 (-\ )M$

$(AC)^2=(\ A)M^2(\ )C^2(H\ )$

$(AB)^2+(AC)^2=2(AM)^2+(BH)^2+(CH)^2-2(MH)^2$

又 $BH^2+CH^2=2BM^2+2HM^2$

$AB^2+AC^2=2AM^2+2BM^2$.

由中線定理得 $AB^2+AC^2=2AM^2+\frac{1}{2}BC^2$

$AC^2+BC^2=2AN^2+\frac{1}{2}$

$AB^2+BC^2=2AL^2+\frac{1}{2}$

其中 N 為 AB 之中點，L 為 AC 之中點。

三式之和為 $2\left(AB^2+BC^2+AC^2\right)=2\left(AM^2+AN^2+AL^2\right)+\frac{1}{2}\left(AB^2+BC^2+AC^2\right)$

故得證。