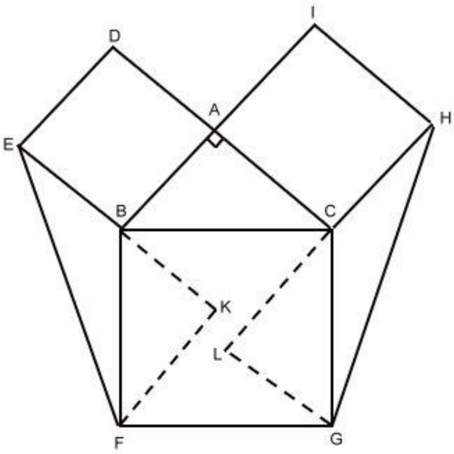
教育部九十六學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）【參考解答】

一、【解】

(1) 從 F 向 EB 的長線作垂線 FK。因直角三角形 ΔABC，ΔBFK 中，$BC = BF$，

$\angle ABC = \angle KBF$，故 $\Delta ABC \cong \Delta KBF$.



$\therefore\ AB = KB,\ AC = KF$

$EK = EB + BK = 2$

在直角三角形 ΔEFK 中，

$FE^2 = EK^2 + KF^2 = (2AB)^2 + (AC)^2$

同理 $\Delta ABC \cong \Delta LCG$

$(HG)^2 = (2AC)^2 + (AB)^2$

$(EF)^2 + (HG)^2 = 5(AB)^2 + 5(AC)^2 = 5(BC)^2$.

(2) $GD^2 = BG^2 + DB^2 - 2BG \times DB\cos\left(90^\circ + B\right)$

$= 2\left(BC^2 + AB^2 + 2BC \cdot AB\sin B\right)$

$= 2\left(BC^2 + AB^2 + 2AC \cdot AB\right)$

同理，$IF^2 = 2\left(BC^2 + AC^2 + 2AC \cdot AB\right)$

$GD^2 + FI^2 = 6BC^2 + 8AC \cdot AB = 10BC^2 - 4\left(AC - AB\right)^2$

$\left(\because BC^2 = \left(AC - AB\right)^2 + 2AC \cdot AB\right)$

故若 $GD^2 + FI^2$ 為 BC^2 之整數倍，則

$8AC \cdot AB = BC^2 = AB^2 + AC^2$

或 $8AC \cdot AB = 2\left(AB^2 + AC^2\right)$

或 $8AC \cdot AB = 3\left(AB^2 + AC^2\right)$

或 $8AC \cdot AB = 4\left(AB^2 + AC^2\right)$

故 $\dfrac{AC}{AB} = 1,\ \dfrac{4}{3} \pm \dfrac{\sqrt{7}}{3},\ 2 \pm \sqrt{3},\ 4 \pm \sqrt{15}.$

二、【證】

可設 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的最高次係數為 1，且 $f(x)=(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)$。若 $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 為 $f(g(x))=0$ 的解，則

$$\begin{aligned} g(x)-\lambda &= (x-l_1)(x-l_2)(x-l_3) \\ g(x)-\mu &= (x-m_1)(x-m_2)(x-m_3) \\ g(x)-\nu &= (x-n_1)(x-n_2)(x-n_3) \end{aligned} \text{。}$$

因此 $(x-l_1)(x-l_2)(x-l_3),\ (x-m_1)(x-m_2)(x-m_3),\ (x-n_1)(x-n_2)(x-n_3)$ 除常數項外係數均相等。故

$$l_1+l_2+l_3=m_1+m_2+m_3=n_1+n_2+n_3=15\text{，}$$

$$l_1^2+l_2^2+l_3^2=m_1^2+m_2^2+m_3^2=n_1^2+n_2^2+n_3^2=95\text{。}$$

若 $n_1=9$，則 $n_2^2+n_3^2=14$，由此得 $(n_2+n_3)^2\le 2(n_2^2+n_3^2)=28$，但這與 $n_2+n_3=6$ 矛盾。

三、【解】

設任何兩個3×3子方陣其數字和相等，則任一行或列其中三個數字和均相等(考慮在一3×4子方陣中的所有3×3子方陣)，由此知所有數字均相等，與假設矛盾。(註：所謂3×3子方陣，是任意三行、三列所交成的方陣，不要求是由連續的三行及連續三列所構成的)

四、【解】

可假設 $0\le\theta\le\pi/4$。令 $t^2=2-\cos\theta,\ s^2=2-\sin\theta$，$t,s\ge1$。則 $(2-t^2)^2+(2-s^2)^2=1$，此可改寫為 $2t^2s^2=(t^2+s^2-2)^2+3$。而

$$\begin{aligned} t^2+s^2-2 &= 2-(\cos\theta+\sin\theta) \\ &= 2-\sqrt{2}\sin(45^\circ+\theta) \\ &\ge 2-\sqrt{2} \end{aligned}$$

故 $t^2s^2=\frac{1}{2}\left[(t^2+s^2-2)^2+3\right]\ge\frac{1}{2}(9-4\sqrt{2})$。因

$$\frac{1}{t}+\frac{1}{s}\le\frac{4}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow\frac{(t+s)^2}{(ts)^2}\le\frac{16}{5}\Leftrightarrow 16(ts)^2-5(t+s)^2\ge0\text{，}$$

而

$$\begin{aligned} 16(ts)^2-5(t+s)^2 &= 5(t^2s^2-t^2-s^2+1)+11(ts)^2-10ts-5 \\ &\ge 11(ts)^2-10ts-5 \end{aligned}\text{，}$$

故若 $11(ts)^2-10ts-5\geq 0$ 要證的不等式成立。若 $ts\geq \dfrac{5+\sqrt{80}}{11}$，則 $11(ts)^2-10ts-5\geq 0$ 。

但 $t^2s^2\geq \frac{1}{2}(9-4\sqrt{2})\geq \left(\dfrac{5+\sqrt{81}}{11}\right)^2\geq \left(\dfrac{5+\sqrt{80}}{11}\right)^2$ ，故得證。