

# 教育部九十六學年度高級中學數學競賽

## 嘉義區複賽試題 (一)

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

(時間二小時)

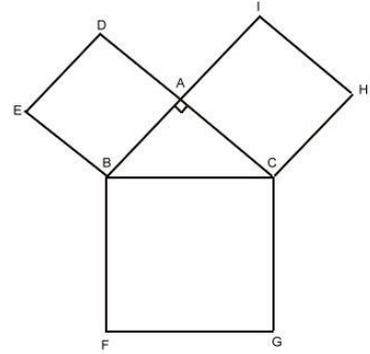
注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、在以  $\angle A$  為直角的三角形  $ABC$  各邊上向外側作正方形  $BADE$ ,  $CBFG$ ,  $ACHI$ ，(12分)

(a) 連接  $EF$ ,  $GH$ ，求證  $\overline{FE}^2 + \overline{GH}^2 = 5\overline{BC}^2$ 。

(b)  $\overline{GD}$  及  $\overline{FI}$  之平方和，一般來說不會是  $\overline{BC}^2$  的整數倍。但當  $\overline{AC} = \overline{AB}$  時， $\overline{GD}^2 + \overline{FI}^2 = 10\overline{BC}^2$ ，試證明之。並找出所有  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$  的值使得  $\overline{GD}^2 + \overline{FI}^2$  為  $\overline{BC}^2$  之整數倍。



二、 $f(x)$  及  $g(x)$  均為三次多項式。試證  $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$  不可能全為  $f(g(x)) = 0$  的解。(12分)

三、將 36 個相異整數填進一  $6 \times 6$  方陣，試證有兩個不同的  $3 \times 3$  子方陣，它們各自的數字和不同。(12分)

四、試證：
$$\frac{1}{\sqrt{2-\cos\theta}} + \frac{1}{\sqrt{2-\sin\theta}} \leq \frac{4}{5}\sqrt{5}。$$
(13分)