

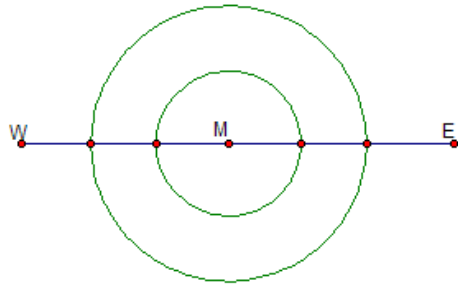
# 九十六學年度高級中學數學科能力競賽試題（二）

## 南區（高屏區）

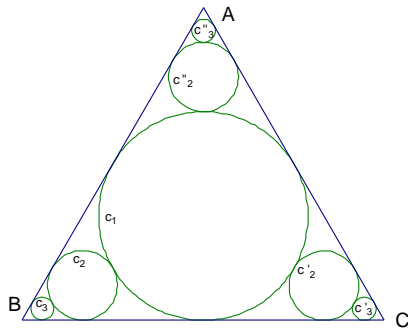
編號：\_\_\_\_\_

一、試求  $\left\lfloor \frac{1998!+1995!}{1997!+1996!} \right\rfloor$ 。其中  $\lfloor x \rfloor$  為小於或等於  $x$  的最大整數。

二、有路徑圖如下，其中  $M$  為線段  $WE$  之中點及兩圓之圓心。甲自  $W$  往  $E$ ，乙自  $E$  往  $W$ ，兩人同時出發，以等速前進。在  $M$  之前的分歧點，選擇各個前進方向的機率相同，則二人在途中不相遇之機率為多少？若路徑圖中的同心圓個數有  $n$  個，其餘條件不變，則二人在途中不相遇之機率為多少？



三、設  $\triangle ABC$  是一個正三角形，圓  $C_1$  是  $\triangle ABC$  的內切圓，圓  $C_2$  與邊  $AB$ 、邊  $BC$  及圓  $C_1$  相切，圓  $C_3$  與邊  $AB$ 、邊  $BC$  及圓  $C_2$  相切，依此方式一直進行下去可以得到圓  $C_1, C_2, C_3 \dots$ 。再依相同方式，可以得到圓  $C_2', C_3' \dots$ ，以及圓  $C_2'', C_3'' \dots$ ，如下圖所示。如果  $\triangle ABC$  的邊長是  $a$ ，試求這些圓的面積總和。



四、若  $x + y = 1, x > 0, y > 0$ ，求  $f(x, y) = \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{x}\right)^2$  的最小值。

五、設  $A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ ，求  $\sum_{n=1}^{200} A^n$ ？

六、在  $\triangle ABC$  中，若  $\angle A, \angle B, \angle C$  的對邊之邊長分別為  $a, b, c$ ，試證：

$$\frac{c \cos A}{a^2} + \frac{b \cos B}{b^2} = \frac{2}{a^2 b}。$$