

教育部九十五學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題 (二)【參考解答】

一、【解】

因 $\triangle OST$ 相似 $\triangle NOQ$ ，有 $\frac{OT}{ON} = \frac{OS}{OQ}$ 。

$$\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{1} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{即 } \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{所以 } (x', y') = \overline{OT} \frac{\overline{OQ}}{\|\overline{OQ}\|} = \frac{(x, y)}{x^2 + y^2} = \frac{(1, 2, 0)}{5}.$$

二、【解】

By (3), $x + y = z$

$$zf(x, z-x) = (z-x)f(x, z)$$

$$\therefore f(x, z) = \frac{z}{z-x} f(x, z-x)$$

$$f(16, 54) = \frac{54}{38} f(16, 38)$$

$$= \frac{54}{38} \cdot \frac{38}{22} f(16, 22)$$

$$= \frac{54}{22} \cdot \frac{22}{6} f(16, 6)$$

$$= 9f(6, 16) = 9 \cdot \frac{16}{10} f(6, 10)$$

$$= 9 \cdot \frac{16}{10} \cdot \frac{10}{4} f(6, 4)$$

$$= 9 \cdot 4 \cdot f(4, 6)$$

$$= 9 \cdot 4 \cdot \frac{6}{2} f(4, 2)$$

$$= 9 \cdot 12 f(2, 4) = 9 \cdot 12 \cdot \frac{4}{2} f(2, 2)$$

$$= 108 \cdot 2 \cdot 2 = 432$$

三、【解】

如果一開始雙胞胎甲被排到 A 位置，那麼整個賽程當中，雙胞胎乙會和他遭遇的情形有四種可能：

一、比賽開始乙在 B 位置(機率 $1/15$)，兩人立即遭遇(機率 1)。

二、比賽開始乙在 C 或 D 位置(機率 $2/15$)，兩人都要贏得第一回合勝利，才能在第二回合碰面(機率 $1/2 * 1/2 = 1/4$)。

三、比賽開始乙在 E、F、G 或 H 位置(機率 $4/15$)，兩人都要贏得前兩回合的勝利，才能在第三回合碰面(機率 $1/4 * 1/4 = 1/16$)。

四、比賽開始乙在 I~P 位置(機率 $8/15$)，兩人都要贏得前三回合的勝利，才能在第四回合碰面(機率 $1/8 * 1/8 = 1/64$)。

所以在整個賽程當中，兩位雙胞胎會遭遇對打的機率為：

$$\frac{1}{15} \times 1 + \frac{2}{15} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{15} \times \frac{1}{16} + \frac{8}{15} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{8}$$

四、【解】

$$x_{k+1} = \frac{2}{x_k + x_k} \Rightarrow \frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_k + 1} = \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_k}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_{2006} + 1} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_{2006}} - \frac{1}{x_{2007}}$$

$$= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{2007}} \quad (\because x_{2007} > 1)$$

五、【解】

$$\text{令 } F = \{a \in X \mid f(a) = a\}$$

若 $b \notin F$ 則 $\{f(b), f^2(b), \dots, f^{101}(b)\}$ 正好有 101 個相異元素。因此 $X - F$ 的元數

個數為 101 的倍數或 2006 和 N 除以 101 同餘，所以 $N = 87$ 。