

教育部九十五學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題 (二)

編號：

_____ (學生自填)

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共五題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、設 A 代表球心在原點，半徑為 1 的球面。令 Q 的座標為 $(1, 2, 0)$, N 的座標為 $(0, 0, 1)$, S 的座標為 $(0, 0, -1)$ 。設 \overline{NQ} 線段交球面 A 於 P 點，求 \overline{PS} 線段與 xy 平面的交點座標。

(4 分)

二、設函數 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足下列三個條件：

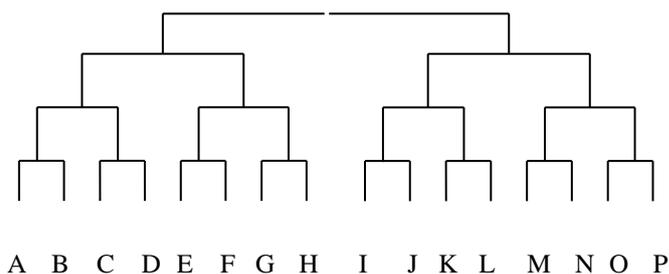
- (4 分)
- (1) $f(x, x) = x$
 - (2) $f(x, y) = f(y, x)$
 - (3) $f(x, y) \cdot (x + y) = f(x, x + y) \cdot y$

求 $f(16, 54)$ 之值。(其中 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(x, y) \mid x, y \text{ 為自然數}\}$ 且 \mathbb{R} 代表所有實數所成的集合)

三、下圖是網球比賽的賽程，總共有 16 位選手參加。競賽採用單淘汰制，一開始主辦單位

(4 分)

將 16 位選手隨機地分配到 A ~ P 的位置，選手們兩兩配對比賽，獲勝者晉級下一回合，輸者則被淘汰，最後經過四個回合比賽產生總冠軍。如果今日有甲和乙兩位雙胞胎參加比賽，請問他們在整個賽程當中，彼此可能會遭遇對打的機率是多少？(假設這 16 位選手的實力相當，兩兩配對比賽時，獲勝或者失敗的機率都是 $1/2$ 。)



四、定義一數列 $\{x_n\}$ 為 $x_1 = \frac{1}{5}$ 且 $x_{k+1} - x_k = x_k^2$, $k \geq 1$ 。求 $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \cdots + \frac{1}{x_{2006}+1}$ 的整數部份。
(4分)

五、設 X 代表一個含有 2006 個元素的集合且已知函數 $f: X \rightarrow X$ 滿足 $f^{101}(a) = a$, 對所有 $a \in X$ 都成立 (f^n 表示函數 f 自我合成 n 次, 如 $f^2(a) = f(f(a))$)。令 N 表示集合 $\{a \in X \mid f(a) = a\}$ 的元素個數且已知 $N \leq 100$, 試求 N 的值。
(5分)