

# 教育部九十五學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題 (一)

編號：\_\_\_\_\_

(學生自填)

(時間二小時)

注意事項：

1. 本試卷共四題，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

---

一、一隻螞蟻正保持在一個正四面體的某一個頂點 A 之上，此時它隨機選擇一個臨近的頂點(每個臨近的頂點被選中的機率皆為  $1/3$ )，並且在一分鐘之後走到那裡；接著它又隨機選擇一個臨近的頂點，並在一分鐘之後走到那裡。假設這隻螞蟻一直以上述的方式在各個頂點之間走動，那麼在 60 分鐘之後，它的位置恰好在一開始起步之頂點 A 的機率是多少呢？

二、設  $x \neq \pm 1$ ， $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ 。解下列有理方程式  
(12分)

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{2x}{1-x^2} + \frac{3x-x^3}{1-3x^2}}{1 - \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{3x-x^3}{1-3x^2}}$$

三、假設三角形三頂點為  $A_1, A_2, A_3$ ，其對邊分別為  $S_1, S_2, S_3$  且對邊長度分別為  $l_1, l_2, l_3$ 。  
(12分) 設  $P$  為三角形內部任意一點， $P$  到  $S_1, S_2, S_3$  的距離分別為  $h_1, h_2, h_3$ 。

求證： $\frac{l_1}{h_1} + \frac{l_2}{h_2} + \frac{l_3}{h_3} \geq 6\sqrt{3}$ 。

四、設  $p$  為奇質數。證明： $2^p + 1 - \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \binom{p+j}{j}$  是  $p^2$  的倍數。  
(12分)