

臺北市九十五學年度  
高級中學數學及自然學科能力競賽  
數學科筆試（一）試題

編號：\_\_\_\_\_（學生自填）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

問題一：設  $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_0$  為一整數係數多項式，而且  $f(x)$  可分解為  $f(x) = (x-1)(x-a_{n-1})(x-a_{n-2})\cdots(x-a_2)(x-a_0)$ ，其中的  $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_2, a_0$  是  $f(x)$  原有的係數。

- (1) 試求出  $n = 2$  時的所有此種多項式。(3 分)
- (2) 試求出  $n = 2$  時的所有此種多項式。(5 分)
- (3) 試求出  $n = 2$  時的所有此種多項式。(5 分)

問題二：試求方程式  $x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$  的實數解。(12 分)

問題三：試證：對所有正數  $a$  與  $b$ ，恆有  $\frac{a^2 + b^2}{2} \times \frac{a^3 + b^3}{2} \times \frac{a^4 + b^4}{2} \leq \frac{a^9 + b^9}{2}$ 。(12 分)

問題四：給定一線段  $\overline{AB}$  及其上另一點  $C$ 。過點  $A$  作  $\overline{AB}$  的垂直線  $l$ ，對於直線  $l$  上異於  $A$  的任意點  $M$ ，作直線  $AB$  對直線  $BM$  的對稱直線，再作直線  $AB$  對直線  $CM$  的對稱直線，設兩對稱直線交於點  $P$ 。試證： $\overline{PB} + \overline{PC} = \overline{AB} + \overline{AC}$ 。(12 分)