94學年度高級中學數學科能力競賽複賽

台南區高級中學數學能力競賽試題(二)【參考解答】

1. 參考答案：

當 $n=0$ 時，$(x+1)^{2\cdot 0+1}+x^{0+2}=x^2+x+1$

$$(x^2+x+1)\,|\,[(x+1)^{2\cdot 0+1}+x^{0+2}]$$

當 $n=1$ 時，$(x+1)^{2\cdot 1+1}+x^{1+2}=(x^3+3x^2+3x+1)+x^3=(x^2+x+1)(2x+1)$

$$(x^2+x+1)\,|\,[(x+1)^{2\cdot 1+1}+x^{1+2}]$$

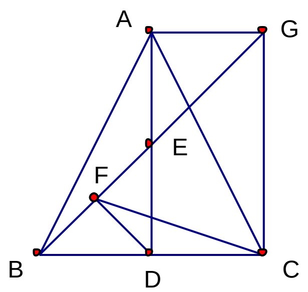
假設存在多項式 $p(x)$，使得 $(x+1)^{2k+1}+x^{k+2}=p(x)(x^2+x+1)$

當 $n=k+1$ 時，$(x+1)^{2k+3}+x^{k+3}=(x+1)^2(x+1)^{2k+1}+x\cdot x^{k+2}$

$$\begin{aligned}&=(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}+x(x+1)^{2k+1}+x\cdot x^{k+2}\\&=(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}+x[(x+1)^{2k+1}+x^{k+2}]\\&=(x^2+x+1)(x+1)^{2k+1}+x[p(x)(x^2+x+1)]\\&=(x^2+x+1)\{(x+1)^{2k+1}+xp(x)\}\end{aligned}$$

故由數學歸納法得知 $(x^2+x+1)\,|\,[(x+1)^{2n+1}+x^{n+2}]$，對所有的 $n\in N\cup\{0\}$ 都成立。

2. 參考答案：



四邊形 ADCG 為長方形，線段 BG ⊥ 線段 AD

所以 ΔDGF 為一直角三角形，DG 為斜邊，

ΔDGF 外接圓圓心在線段 DG 的中點，也是

長方形 ADCG 外接圓圓心。因此，

A、F、D、C、G 這五點共圓。

所以，圓周角 ∠ACF = 圓周角∠ADF。

AD⊥BC⇒ ∠EBD + ∠BED = 90 = ∠FDE + ∠BED，

所以，∠EBD = ∠FDE = ∠FDA = ∠FCA。

因∠ABC = ∠ACB，所以，∠ABF = ∠BCF。

3. 參考答案：

f(n)/n – f(n–1)/(n–1) = f(n–1)/n(n-1)

(n–1)f(n) – nf(n–1) = f(n–1)

$(n-1)f(n) = (n+1)f(n-1)$

$f(n) = (n+1)f(n-1)/(n-1)$

$f(n) = f(n-1)*(n+1)/(n-1)=f(n-2)* (n+1)n/(n-1)(n-2)$

$\quad = f(2)*(n+1)n\ldots4/(n-1)(n-2)\ldots2,\quad f(2)=1$

$\quad = (n+1)n/6$

$f(120) = 2420$

4. **參考答案：**

設 β 為共同解，由兩方程式得 $\beta(\beta+a+c)=0$

$\because\ b\neq 0 \quad \therefore\ \beta\neq 0 \ \Rightarrow\ \beta+a+c=0$

令 $\beta=-(a+c)$ 代入方程式 $x^2+2ax+b^2=0$

整理得 $a^2=b^2+c^2$

故 Δ 為直角三角形 $\therefore$ 其最大角的正弦函數值為 1

5. **參考答案：**

$\because\ x_1 = r\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ， $x_2 = r^2\sin 2\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

$\therefore\ r\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

解得 $\tan\theta = \sqrt{3} \ \Rightarrow\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$ 及 $r = \dfrac{1}{2}$

<u>答</u>： $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$