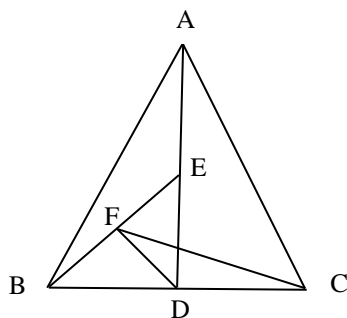


# 94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

## 台南區高級中學數學能力競賽 試題(二)

1. 證明  $(x^2 + x + 1) \mid [(x+1)^{2n+1} + x^{n+2}]$ ，對所有的  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  都成立；其中  $\mathbb{N}$  代表所有自然數所成集合。(4%)
2.  $\triangle ABC$  為一等腰三角形，其中  $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $D$  為線段  $\overline{BC}$  的中點， $E$  為線段  $\overline{AD}$  的中點，線段  $\overline{DF}$  垂直於線段  $\overline{BE}$ 。試證  $\angle ABE = \angle BCF$ 。(4%)



3. 設函數  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  定義如下：

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{當 } n=1 \\ n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{k(k+1)}, & \text{當 } n \geq 2 \end{cases}$$

(註： $\mathbb{N}$  為所有正整數的集合， $\mathbb{R}$  為所有實數的集合)

試求  $f(120)$  的值是多少？(4%)

4. 設  $a$ 、 $b$ 、 $c$  皆為正數，且兩方程式  $x^2 + 2ax + b^2 = 0$ ， $x^2 + 2cx - b^2 = 0$  有共同實數解。則以  $a$ 、 $b$ 、 $c$  三數為三邊長之三角形，其最大內角的正弦函數值為何？(4%)
5. 數列  $\{x_n\}$ ，其中  $\forall n \in \mathbb{N}$ ， $x_n = r^n \sin n\theta$  ( $r > 0$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ )，又已知  $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ， $x_2 = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ，求  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  的值。(5%)