94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

台南區高級中學數學能力競賽試題(一)【參考解答】

1. 參考答案：

(1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2$

$=\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\cos 60^\circ-\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\cos 30^\circ-\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\cos 30^\circ+4$

$=16-10\sqrt{3}$

(2) $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$

$=\alpha\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)+\beta\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)+\overrightarrow{OC}$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=\alpha\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)+\beta\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{CP}=\alpha\overrightarrow{CA}+\beta\overrightarrow{CB}$ ， $\gamma=1-\alpha-\beta\geq 0$

$\therefore\ \alpha+\beta\leq 1$， $\alpha\geq 0$， $\beta\geq 0$

$\therefore$ p 點軌跡為 ΔABC 區域，而

$\Delta ABC=\Delta OAC-\Delta OAB-\Delta OBC$

$=\frac{1}{2}\left[4\times 6\times\sin 60^\circ-4\times 2\times\sin 30^\circ-2\times 6\times\sin 30^\circ\right]$

$=6\sqrt{3}-5$

2. 參考答案：

$n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$

$2n+6=2(n+3)$

<u>case1</u>：n 是 4k+1，則

$n^2+3n+2=(n+1)(n+2)=(4k+2)(4k+3)=2(2k+1)(4k+3)$

$2n+6=2(n+3)=2(4k+4)$

$\because$ 4k+3 和 4k+4 為兩連續正整數，所以 $(4k+3,4k+4)=1$

$\therefore$ $(4k+3,2(4k+4))=1$

$\because$ $(4k+3,2(4k+4))=1$ 且 $(2k+1,2k+2)=1$ ($\because$ 2k+1 和 2k+2 為兩連續正整數)

$\therefore$ $(n^2+3n+2,\ 2n+6)=(2(2k+1),\ 2(4k+4))=(2(2k+1),\ 4(2k+2))$

$$=2(2k+1,\ 2(2k+2))=2$$

<u>case2</u>：n 是 4k+3，則

$$n^2+3n+2=(n+1)(n+2)=(4k+4)(4k+5)=4(k+1)(4k+5)$$

$$2n+6=2(n+3)=2(4k+6)=4(2k+3)$$

$\because$ 由輾轉相除法原理得 $(4k+5,4(2k+3))=1$ 且 $(k+1,2k+3)=1$

$\therefore$ $(n^2+3n+2,2n+6)=(4(k+1),4(2k+3))=4$

<u>case3</u>：n 是偶數

$$n^2+3n+2=(\frac{n}{2})(2n+6)+2$$

$\therefore$ 由輾轉相除法原理得

$$(n^2+3n+2,2n+6)=(2n+6,2)=2$$

3. 參考答案：

設 n 為一正整數，$n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$，滿足條件(a)共有 n 種。

因 $k a_1 \leqq a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n \leqq a_1 + (k-1)(a_1 + 1) = k a_1 + k-1$，

$a_1 \leqq n/k \leqq a_1 + (k-1)/k < a_1 + 1$。 $a_1 = \text{floor}(n/k)$

因此，共有 n 種不同的加法表示法。

因此，將 2101 表成正數的和滿足條件(a)共有 2101 種不同的表示法。將 2101 表成正數的和滿足條件(b)，我們只要考慮將 2100 表成正數的和滿足條件(b)，同時去掉 k 個數都相同的，如 2100 = 700 + 700 +700，再將 a_k加 1 即可。

$2100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7$ 共有 (1+2)(1+1)(1+2)(1+1) = 36 個因數，因此，2101 表成正數的和滿足條件(b) 共有 2100 – 36 = 2064 種不同的表示法。因此，全部共有 2101 + 2064 = 4165 種不同的表示法。

4. 參考答案：

設 ΔABC 邊長為 x，由餘弦定理得

$$\cos\theta=\frac{40+x^2}{14x} \qquad \text{及} \qquad \cos\left(60^0-\theta\right)=\frac{24+x^2}{14x}$$

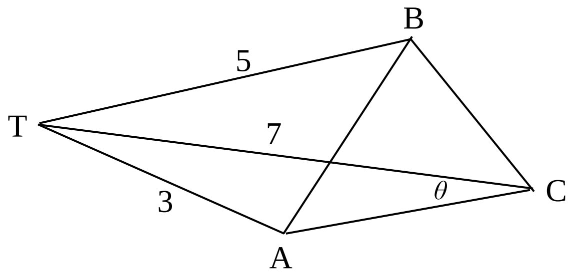
$$\Rightarrow\ \sin\theta=\frac{8+x^2}{14\sqrt{3}x} \qquad \therefore\ 1=\frac{\left(40+x^2\right)^2}{196x^2}+\frac{\left(8+x^2\right)^2}{588x^2}$$

$$588x^2=3\left(40+x^2\right)^2+\left(8+x^2\right)^2$$

$$x^4-83x^2+1216=0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(x^2-19\right)\left(x^2-64\right)=0$$

解得 $x=\sqrt{19}$ 或 $x=8$（不合）

<u>答</u>： ΔABC 面積為 $\frac{19}{4}\sqrt{3}$ 。



5. **參考答案：**

已知 $a=5$，$b=3$，$c=4$

$\Delta PFF'$ 周長為 $FF'+PF+PF'=2c+2a=8+10=18$

令 $s=\frac{18}{2}=9$。 $\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-PF)(s-FF')}{s(s-PF')}}$ 及 $\tan\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-PF')(s-FF')}{s(s-PF)}}$

故 $\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{s-FF'}{s}=\frac{1}{9}$