

台灣省第四區九十五學年度  
高級中學數學及自然科能力競賽  
數學科筆試(二)試題

編號：\_\_\_\_\_ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共七題填充題，每題 3 分，滿分 21 分。
2. 考試時間：1 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將答案填寫在答案欄內。

1. 所有自集合  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  至集合  $\{95, 2006\}$  的函數中，滿足

$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$  是偶數的函數  $f$  有 \_\_\_\_\_  
(一) \_\_\_\_\_ 個。

2. 令函數  $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{6x - 9}} + \sqrt{x - \sqrt{6x - 9}}$ 。已知當  $a \leq x \leq b$  時， $f(x)$  會得到此函數的最小值。則  $b - a$  的最大值為 \_\_\_\_\_ (二) \_\_\_\_\_。

3. 等腰三角形  $ABC$ ，其中  $\overline{AB} = \overline{AC}$ 。假設  $\angle B$  的角平分線交  $\overline{AC}$  邊於  $D$  點，且  $\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{AD}$ ，則  $\angle A =$  \_\_\_\_\_ (三) \_\_\_\_\_。

4. 坐標平面上有兩定點  $A$ 、 $B$ ，其坐標分別為  $A(1, 6)$ 、 $B(9, -2)$ 。對於  $x$  軸上任一點  $P(x, 0)$ ，令  $g(x)$  表示兩線段  $\overline{AP}$  及  $\overline{BP}$  中較長之一段的長度 (若兩線段等長，則  $g(x)$  表示此共同長度)。則當  $x =$  \_\_\_\_\_ (四) \_\_\_\_\_ 時，函數  $g(x)$  會得到其最小值。

5. 考慮雙曲線  $\Gamma: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  及其上一點  $E$ ，且  $E$  點位於第一象限。若過  $E$  點與  $\Gamma$  相切的直線和  $E$  點與  $\Gamma$  之某一焦點的連線的夾角為  $45^\circ$ ，則  $E$  點的  $y$  坐標為 \_\_\_\_\_ (五) \_\_\_\_\_。

6. 已知  $\triangle ABC$  的三邊長分別為  $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{CA} = 5$ ， $\overline{AB} = 3$ 。若  $\triangle ABC$  之內部一點  $P$  到三邊  $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$  之距離分別為  $x, y, z$ ，則  $x^2 + y^2 + z^2$  之最小值為 \_\_\_\_\_ (六) \_\_\_\_\_。

7. 甲乙兩人使用撲克牌玩「抽烏龜」的遊戲。經過第一階段的丟牌之後，甲手中剩下 3、6、7 三張牌，而乙手中剩下 3、6、7 以及鬼牌四張牌。現自甲開始兩人輪流向對方抽一張牌，且每張牌被抽到的機率相等。若抽到的牌的號碼和自己手中某一張牌的號碼相同，則這兩張相同號碼的牌可以丟棄；若抽到的牌是鬼牌，則需將鬼牌留在自己手中。如此進行下去，最後手中只剩下鬼牌的人為輸家。則甲獲勝的機率為 \_\_\_\_\_ (七) \_\_\_\_\_。