

台灣省第四區九十五學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】：試求所有滿足方程式

$$\begin{cases} w + 2xyz = 3 \\ x + 2yzw = 3 \\ y + 2zwx = 3 \\ z + 2wxy = 3 \end{cases}$$

的實數解 (w, x, y, z) 。(16 分)

【問題二】：考慮正三角形 ABC ，其中 $\overline{AB} = 1$ 。在 \overline{AB} 邊上取一點 P_1 ，自 P_1 向 \overline{BC} 邊作垂線，垂足為 Q_1 ；再以 Q_1 向 \overline{CA} 邊作垂線，垂足為 R_1 ；再從 R_1 向 \overline{AB} 作垂線，垂足為 P_2 等等。這樣繼續下去得到三組點列 $\{P_n\}$ ， $\{Q_n\}$ ， $\{R_n\}$ 。令 $\overline{AP_1} = x$ 。

(1) 試以 x 表示 $\overline{AP_2}$ 。(3 分)

(2) 試以 x 表示無窮級數和 $\overline{P_1P_2} - \overline{P_2P_3} + \overline{P_3P_4} + \cdots + (-1)^{n-1} \overline{P_nP_{n+1}} + \cdots$ 。(14 分)

【問題三】：試求所有滿足方程式 $2^x + 3^y = z^2$ 的正整數解 (x, y, z) 。(16 分)