台灣省第二區九十五學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)【參考解答】

問題一：

【證明】由於三角函數為週期函數，所以只需討論當$-\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{3\pi}{2}$的情形。

（1）當$\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$時，$-\dfrac{\pi}{2}<-1\le\cos x<0$且$-\dfrac{\pi}{2}<-1<\sin x<1<\dfrac{\pi}{2}$，則$\sin(\cos x)<0<\cos(\sin x)$。

（2）當$0<x<\dfrac{\pi}{2}$時，$\because 0<\sin x<x$且$\cos x$在此區間為遞減函數，$\therefore\cos x<\cos(\sin x)$。又$\because 0<\cos x<1\ \therefore\sin(\cos x)<\cos x$，因此$\sin(\cos x)<\cos x<\cos(\sin x)$。

（3）當$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$時，$\because x<\sin x<0$且$\cos x$在此區間為遞增函數，$\therefore\cos x<\cos(\sin x)$。又$\because 0<\cos x<1\ \therefore\sin(\cos x)<\cos x$，因此$\sin(\cos x)<\cos x<\cos(\sin x)$。

（4）最後，$\sin(\cos(-\dfrac{\pi}{2}))=\sin 0=0<\cos(-1)=\cos(\sin(-\dfrac{\pi}{2}))$，

$\sin(\cos 0)=\sin 1<1=\cos 0=\cos(\sin 0)$， $\sin(\cos\dfrac{\pi}{2})=\sin 0=0<\cos 1=\cos(\sin\dfrac{\pi}{2})$。

得證。

問題二：

【解】通分，得 $abc\mid d(\ +a\ +b\ +c)(d\ \ b+c\ d\ \ a+c\ d\ +a\ b$

$$\therefore\ a\mid(b+c+d)bcd\Rightarrow a\mid b+c+d$$

同理，$b\mid a+c+d,\ \ c\mid a+b+d,\ \ d\mid a+b+c$

不妨設，$a\ge b\ge c\ge d$ $\quad\because b+c+d\le 3a\ \ \therefore b+c+d=3a,\ 2a$

(1) 若$b+c+d=3a$，則$a=b=c=d=1$ (合)

(2) 若$b+c+d=2a$，$\because b+c+d\le 3b\ \therefore 2a\le 3b\ \ \therefore\dfrac{a}{b}\le\dfrac{3}{2}$

$\therefore\dfrac{a+c+d}{b}\le\dfrac{3}{2}+2=\dfrac{7}{2}\quad\therefore a+c+d=b\ ,\ \ 2b,\ \ 3b$

(不合) (不合)

若 $a+c+d=3b$，則 $\begin{cases}a+c+d=3b\\ b+c+d=2a\end{cases}\Rightarrow a-b=3b-2a\ \Rightarrow 3a=4b\Rightarrow a=4,b=3$

$$\Rightarrow c+d=5 \quad (\text{不合})$$

(3)若 $b+c+d=a$ 則 $a\le 3b$ $\therefore \dfrac{a}{b}\le 3$

$\dfrac{a+c+d}{b}\le 5$ $\therefore a+c+d=b,\quad 2b,3b,4b,5b$

(不合)

$\begin{cases} a+c+d=2b \\ b+c+d=a \end{cases}$	$\begin{cases} a+c+d=3b \\ b+c+d=a \end{cases}$	$\begin{cases} a+c+d=4b \\ b+c+d=a \end{cases}$	$\begin{cases} a+c+d=5b \\ b+c+d=a \end{cases}$
$a-b=2b-a$	$a-b=3b-a$	$a-b=4b-a$	$a-b=5b-a$
$2a=3b$	$2a=4b$	$2a=5b$	$2a=6b$
$a=3,\ b=2$	$a=2b$	$a=5,\ b=2$	$a=3b$
$c+d=1$ (不合)	$a=2, b=1$ (不合)	$c+d=3$(不合)	$a=3, b=1$
			$c+d=2$
			$c=d=1$
			(3 , 1 , 1帶入原式合

Ans： $(a,b,c,d)=(1,1,1,1)$, 及 $(3,1,1,1), (1,3,1,1), (1,1,3,1), (1,1,1,3)$

問題三：

【解】設 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5 為給定的五個點，A_2，A_3，A_4，A_5 兩兩的連線共有 $C_2^4=6$ 條。從 A_1 可向這 6 條直線作 6 條垂線；依此 5 個點共有 30 條垂線，它們之間最多有 $C_2^{30}=435$ 個交點，但應排除以下三種情況：

(i) 例如從 A_1，A_2，A_3 向 $\overline{A_4A_5}$ 作的三條垂線互相平行而無交點，這種情形共有 $C_2^5\times C_2^3=30$ 個。

(ii) 從 A_i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ 出發的所作的 6 條垂線都交於 A_i 點，這樣的點共有 $5\cdot C_2^6=75$ 個，只能留下 5 個點，剩下的 70 個點應減去。

(iii) A_i $(i=1, 2, 3, 4, 5)$ 中每三點構成一個三角形，三高交於一點，應減去 $C_3^5(C_2^3-1)=20$ 個點。

因此滿足題意的交點最多有 $435-30-70-20=315$ 個。