

95 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

南區（高雄區） 筆試(二)試題

注意：請在答案卷上作答，須列過程及說明理由

作答時間一小時

1. 已知一直角三角形的周長為 $4 + \sqrt{26}$ ，且斜邊上的中線為 2，試求此直角三角形面積及斜邊上的高。

2. 設 N, M 均為四位數， $N = 3M$ 且 N, M 都是由同樣的數字組成的二數，試求滿足這樣條件之最小的 N 值。（首位數字均不為零）

3. 設 n, r 為正整數，我們定義 $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ，其中 $k! = k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1$ ，試證：

$$(1) \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (2)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \cdots + \binom{n+k}{k} + \cdots + \binom{n+r}{r} = \binom{n+r+1}{r}$$

4. $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 75^\circ$ ， $\angle BCA = 45^\circ$ 。在 \overline{BC} 上取一點 P ，使得 $\overline{BP} = 2\overline{PC}$ ，試求 $\angle APB$ 的度數。

5. 設 n 為正整數，如果 $2^4 + 2^7 + 2^n$ 為完全平方數，試求 n 之值。

6. 設 x, y, z 為正實數，且 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ，試求 $A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ 的最小值。