

# 95 學年度高級中學數學科能力競賽複賽

## 南區（高雄區） 筆試(一)試題

注意：請在答案卷上作答，須詳列過程及說明理由；

作答時間二小時

1. 設  $x, y, z$  都是小於 1 的正實數，試證： $x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) < 1$ 。

2. 設  $a, b, c$  為正整數，如果  $(b - \frac{1}{a})(c - \frac{1}{b})(a - \frac{1}{c})$  為整數，試求  $a, b, c$  之值。

3. 考慮費氏數列，其定義如下：

$$F_1 = 1, F_2 = 1, \text{ 且 } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n = 1, 2, 3, \dots,$$

其中前幾項為：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

試以歸納法證明

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

其中  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  表示不大於  $\frac{n}{2}$  的最大整數，而  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ，

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1。$$

4. 設  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{2005}$  為  $z^{2006} = 1$  之 2006 個相異根，

試求  $|z_0 - z_1|^2 + |z_0 - z_2|^2 + \cdots + |z_0 - z_{2005}|^2$  之值。

5. 正三角形  $\triangle ABC$  內接於半徑為 2 的圓。將線段 AB 由 A 到 B 向外延長至 D 點使

得線段 AD=13，且將線段 AC 由 A 到 C 向外延長至 E 點使得線段 AE=11。過 D

點畫一條平行線段 AE 的直線  $l_1$ ，過 E 點畫一條平行線段 AD 的直線  $l_2$ ，直線  $l_1$

與  $l_2$  交於 F 點。G 為圓上異於 A 的一點，且與 A、F 共線。已知  $\triangle BCG$  的面積可

以表示為  $\frac{p\sqrt{q}}{r}$ ，其中  $p, q, r$  為正整數， $p$  與  $r$  互質，且  $q$  不能被任何質數

的平方整除，試求  $p+q+r$  之值。