教育部九十五學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（二）【參考解答】

一、【解】

因為$9+8+7+6+5+7=42$可被 3 整除，且$9-8+7-6+5-7=0$可被 11 整除，所以987657有質因數 3 和 11。現在

$$9\ 8\ 7\ 6 = 5\ 7 \times\ 3 \times\ 1$$

但已知987657有 12 個正因數，且 29929 不含 3 或 11 為其因數，所以 29929 必可寫成 p^2 的形式，其中 p 為質數，因此將 29929 開平方得$29929=173^2$，經檢驗 173 確為質數，故 987657 的所有質因數為 3, 11, 173.

二、【解】

$$13 = x + y^2 + z^3 = \frac{x}{9} + \frac{x}{9} + \cdots + \frac{x}{9} + \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{y^2}{3} + z^3$$

$$\geq 13 \cdot \left[\left(\frac{x}{9}\right)^9 \cdot \left(\frac{y^2}{3}\right)^9 \cdot z^3 \right]^{\frac{1}{13}}$$

$$= 13 \cdot \left[\frac{\left(x^3 y^2 z\right)}{9^9 \cdot 3^3} \right]^{\frac{1}{13}}$$

所以 $x^3 y^2 z \leq \left(9^9 \cdot 3^3\right)^{1/3} = 9^9 \cdot 3 = 3^7$

等號成立於 $\dfrac{x}{9} = \dfrac{y^2}{3} = z^3 = 1$

故 $x^3 y^2$ 的最大值為3^7.

三、【證明】

$$\left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{x^2-4}{5(1+x^2)}\right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left|2x^2 - 8\right| < 1 + x^2.$$

甲、　　當 $2x^2 - 8 < 0$，則

$$8 - 2x^2 < 1 + x^2 \Leftrightarrow 7 < 3x$$

因此 $\frac{7}{3} < x^2 < 4$.

乙、 當 $2x^2 - 8 \geq 0$，則

$2x^2 - 8 < 1 + x^2 \quad \Leftrightarrow x^2 \quad <$

因此 $4 \leq x^2 < 9$.

由(a), (b)得到

$$\frac{7}{3} < x^2 < 9$$

結果 $\delta = 2 - \sqrt{\frac{7}{3}}$.

四、【解】

設雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

若雙曲線的切線 L 斜率為 m ，則 L 的方程式為 $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

今兩切線的斜率分別為$1, -2$，所以可得

$$\sqrt{a^2 - b^2} = 2 \text{ 與 } \sqrt{4a^2 - b^2} = 5$$

解得 $a^2 = 7$, $b^2 = 3$。故雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{3} = 1$.

五、【解】

小明所猜紅球數與 10 個至多相差 3 的事件相當於

$$\left[\frac{m}{8} \cdot 2\ 0\right] = \quad 7\ ,\ 8\ ,\ 9\ ,\ 1$$

此相當於 $m = 3, 4, 5$.

而 $P(m = 3,4,5) = \frac{C_3^{10} \cdot C_5^{10} + C_4^{10} \cdot C_4^{10} + C_5^{10} \cdot C_3^{10}}{C_8^{20}} = \frac{3486}{4199}$.

六、【解】

$\Delta A_1\ \ B_1$ 的面積是 ΔABC 的面積減去 $\Delta A_1B_1C_1$, ΔBA_1B_1, ΔCB_1C_1 三個三角形的面積。

ΔAA_1C_1 的面積 $= \frac{1}{2}\overline{AA_1} \cdot \overline{AC_1} \cdot \sin A$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\overline{AB}\cdot\frac{3}{5}\overline{AC}\cdot\sin A$$

$$=\frac{6}{25}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A$$

$$=\frac{6}{25}\cdot\Delta ABC\text{ 的面積}.$$

同理 ΔBA_1B_1，ΔCB_1C_1 的面積皆為 ΔABC 的 $\frac{6}{25}$. 故 $\Delta A_1B_1C_1$ 的面積是 ΔABC 的

$1-\frac{6}{25}\times 3=\frac{7}{25}$.

同理 $\Delta A_2B_2C_2$ 的面積是 $\Delta A_1B_1C_1$ 的 $\frac{7}{25}$ ，其餘類推。所以

$$\frac{\Delta A_1B_1C_1,\Delta A_2B_2C_2,\cdots\text{的面積和}}{\Delta ABC\text{的面積}}$$

$$=\frac{\frac{7}{25}+\left(\frac{7}{25}\right)^2+\left(\frac{7}{25}\right)^3+\cdots}{1}$$

$$=\frac{\frac{7}{25}}{1-\frac{7}{25}}$$

$$=\frac{7}{18}$$