

教育部九十五學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題 (二)

編號：_____

(學生自填)

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，滿分為二十一分。
2. 不可使用計算器。
3. 請將答案寫在答案欄內。
4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、已知 987657 共有 12 個正因數，試找出 987657 的最大質因數。
(3分)

二、設 x, y, z 皆大於 0，若 $x + y^2 + z^3 = 13$ ，求 $x^3 y^2 z$ 的最大值。
(3分)

三、找出使以下命題成立的最大正數 δ ：若 $|x-2| < \delta$ ，則 $\left| \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{5} \right| < \frac{1}{10}$ 。
(3分)

四、設雙曲線的貫軸、共軛軸分別在坐標平面的 x 軸與 y 軸上。已知兩直線 $y = x - 2$ 與 $y = -2x + 5$ 皆為此雙曲線的切線，試求此雙曲線的方程式。
(4分)

五、設袋中有紅、白球各 10 個，但小明只知道袋中有紅、白球共 20 個而不知各有幾個。小明隨機抽出 8 個球，並採取以下的“猜球”策略：若抽出的 8 球中含 m 個紅球，則猜袋中有 $\left[\frac{m}{8} \cdot 20 \right]$ 個紅球（其中 $[]$ 表高斯符號）。試問小明所猜紅球數與真實的紅球數（10 個）相差至多 3 個的機率有多少呢？

六、如下圖所示，在 $\triangle ABC$ 之三邊上，依 \overline{AB} ， \overline{BC} ， \overline{CA} 之順序將各邊上分為 2:3 之內分點命為 A_1, B_1, C_1 ；其次依 $\overline{A_1 B_1}$ ， $\overline{B_1 C_1}$ ， $\overline{C_1 A_1}$ 之順序將 $\triangle A_1 B_1 C_1$ 之各邊上分為 2:3 之內分點命為 A_2, B_2, C_2 。

像這樣無窮盡地操作下去，可得到 $\triangle A_1 B_1 C_1$ ，

$\Delta A_2B_2C_2, \Delta A_3B_3C_3, \dots$ ，試求這些三角形面

積總和與原 ΔABC 面積之比值。