教育部九十五學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）　　編號：__________

（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1. 本試卷共五題計算、證明題，滿分為四十九分。

2. 不可使用計算器。

3. 請將答案寫在答案欄內。

4. 計算紙必須連同試卷交回。

一、設 p, q, r 為實數。若三次方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 所有的根皆相異且只可能是 $-3, -2, -1$，$0, 1, 2, 3$，試求 $p+q+r$ 的最大值與最小值。
(9 分)

二、設函數 $f(\theta)=\sec\theta-\frac{1}{2}\tan\theta,\ \ 0\le\theta<\frac{\pi}{2}$，試求 $f(\theta)$ 的最小值。
(10 分)

三、設 n 為自然數，考慮 $1,2,3,\cdots,n$ 的任意一種排列 $a_1a_2\cdots a_n$。現在將滿足條件「如果 $i<j$ 且 $a_i>a_j$，則 $j-i=a_i-a_j=1$」的所有排列組成集合 A_n，例如：$A_1=\{1\}$，$A_2=\{12,21\}$，$A_3=\{123,132,213\}$。試求集合 A_{11} 的元素個數。
(10 分)

四、設 $F_1(-4,0),\ F_2(4,0)$ 為橢圓 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的兩焦點，且 $A(2,2)$ 在橢圓的內部。若 P 為橢圓上任意一點，證明 $10-2\sqrt{2}\le\ \overline{PA}+\overline{PF_1}\ \le 10+2\sqrt{2}$.
(10 分)

五、對於任一自然數 n，令
(10 分)

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}C_k^n=C_0^n-\frac{1}{3}C_1^n+\frac{1}{5}C_2^n-\frac{1}{7}C_3^n+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n$$

(1) 證明：對於所有自然數 n，$S_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}S_n$ 恆成立。

(2) 證明：對於所有自然數 n ，$S_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.