九十五學年度高級中學數學科能力競賽試題（二）

南區（高屏區）【參考解答】

［問題一］：P 、Q 、R 為 $y=x^2$ 上相異三點，

因此 $y_1=1$，$y_2=\dfrac{1}{4}$，$y_3=x_3^2$。

又 $\overline{PQ}\perp\overline{QR}$，得斜率乘積 $\dfrac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{2}+1}\cdot\dfrac{x_3^2-1}{x_3-2}=-1$

解出 $x_3=\dfrac{3}{2}$ 或 $\dfrac{1}{2}$（不合，∵ $Q\neq R$），故 $R(\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{4})$。

再因為 -1、$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{3}{2}$ 是方程式 $x^3+ax^2+bx+c=x^2$ 三根

利用根與係數關係，解得 $a=0$，$b=-\dfrac{5}{4}$，$c=\dfrac{3}{4}$。

［問題二］：

$$f(x)=(x-2)(x-1)(x+1)$$
$$g(2)=f(f(f(2)))=f(f(0))=f(2)=0$$
$$g(1)=f(f(f(1)))=f(f(0))=f(2)=0$$
$$g(-1)=f(f(f(-1)))=f(f(0))=f(2)=0$$

∴利用因式定理，得證 $x-2$, x -1, $x+1$ 皆為 g(x)的因式，

故 f(x) 整除 g(x)。

［問題三］：$f(a)=\dfrac{1}{120}|a-1|+\dfrac{2}{120}|a-2|+\dfrac{3}{120}|a-3|+....+\dfrac{15}{120}|a-15|$,

當 $a=11$ 時，$f(11)$ 值最小。

［問題四］：A 中之元素為 $z=\cos\dfrac{k\pi}{8}+i\sin\dfrac{k\pi}{8}$, $k=0,1,2,.....,15$

B 中之元素為 $w=\cos\dfrac{m\pi}{18}+i\sin\dfrac{m\pi}{18}$, $m=0,1,2,.....,35$

C 中之元素為 $zw=\cos(\dfrac{(9k+4m)\pi}{72})+i\sin(\dfrac{(9k+4m)\pi}{72})$,

故 C 中之元素個數有 $72\times 2=144$ 個

［問題五］：因為 $p(x)$ 為偶函數又沒有 0 根，所以 8 個實數根正負各佔一半，所以有 4 個負實數根.

［問題六］： 過 F 作 $\overline{FG} // \overline{AB}$ 且交 $\overline{BC}$ 延長線於 G

$\overline{DE} = \overline{EF}$ $\angle DEB = \angle GEF$ $\angle BDE = \angle GFE$

$\therefore \Delta BDE \cong \Delta GFE$ (ASA)

$\angle CGF = \angle B = \angle ACB = \angle GCF$

$\overline{CF} = \overline{FG} = \overline{BD}$ (因為 $\Delta BDE \cong \Delta GFE$)

$\overline{AF} = 3\overline{BD} = 3(1/2\overline{AB})$