

九十五學年度高級中學數學科能力競賽試題（二）

南區（高屏區）

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：1 小時
- (2)本試卷共六題，滿分 21 分。第一題 4 分，第二題 4 分，第三題 4 分，第四題 3 分，第五題 3 分，第六題 3 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：已知三次函數 $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 圖形與拋物線 $y = x^2$ 圖形交於相異三點 $P(-1, y_1)$ 、 $Q(1/2, y_2)$ 、 $R(x_3, y_3)$ ，且 \overline{PQ} 垂直 \overline{QR} 。試求 a 、 b 、 c 各值。

[問題二]：設 $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ， $g(x) = f(f(f(x)))$ 。
證明：多項式 $g(x)$ 一定能夠被 $f(x)$ 整除。

[問題三]：箱子裡有大小相同的號碼球 120 個，其中 i 號球有 i 個， $i = 1, 2, \dots, 15$ 。從箱子裡一直取球（取後放回），每取一球就計算該球之球號與某數 a 的差。為使這些差的期望值為最小，則 a 值為何？

[問題四]：設 $A = \{z \mid z^{16} = 1, z \text{ 是複數}\}$ ， $B = \{w \mid w^{36} = 1, w \text{ 是複數}\}$ ， $C = \{zw \mid z \in A, w \in B\}$ ，試問集合 C 中元素個數為何？

[問題五]：已知多項式 $p(x) = x^8 - 12x^6 + 49x^4 - 78x^2 + 42$ 沒有複數根，試問 $p(x)$ 有多少負的實數根？(需針對答案加以說明理由)

[問題六]：等腰 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，點 D 為 \overline{AB} 的中點，過點 D 作一直線交線段 \overline{BC} 於點 E 且交線段 \overline{AC} 的延長線於點 F 。設 $\overline{DE} = \overline{EF}$ ，求證 $2\overline{AF} = 3\overline{AB}$ 。