九十五學年度高級中學數學科能力競賽試題（一）

南區（高屏區）【參考解答】

［問題一］. 設過 $(1,2)$ 直線方程式為 $y-2=m(x-1)$ 其中 $m\neq 0$ 與雙曲線 $xy=1$ 交於 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ 兩點。

消去 y，得 x_1，x_2 滿足方程式 $mx^2-(m-2)x-1=0$

$$\therefore x_1+x_2=\frac{m-2}{m} \quad , \quad x_1x_2=-\frac{1}{m}$$

又 $y_1+y_2=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2-m$ 及 $y_1y_2=\dfrac{1}{x_1x_2}=-m$

線段 $\overline{PQ}$ 長為 $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$$\because (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\frac{m^2+4}{m^2}+(m^2+4)=\frac{m^4+5m^2+4}{m^2}$$

且 $m^2>0$ $\therefore$ $m^2+5+\dfrac{4}{m^2}\geq 5+2\sqrt{m^2\cdot\dfrac{4}{m^2}}=9$

$\longrightarrow$ 得知 $\overline{PQ}$ 最小值為 3 。

［問題二］: 如果 $x+1\geq 0$，則 $\sqrt{y(y+1)}-1\leq x$，因此 $x^2\geq y^2+y+1+2\sqrt{y^2+y}\geq y^2-y$.

（因為 $2y+1\geq 2\sqrt{y^2+y}$）.

如果 $x+1<0$，則 $\sqrt{y(y+1)}\leq -x-1$，

因此 $x^2\geq y^2+y+1-2\sqrt{y^2+y}\geq y^2-y$.

［問題三］：令 $[x]=n$ ，$x-[x]=m,0\leq m<1$，$x=n+m$

由題意 $2(n+m)^2-[2(n+m)^2]=2m^2$

$2(n^2+2nm+m^2)-[2n^2+4nm+2m^2]=2m^2$

$4nm-[4nm+2m^2]=0$

即 $4nm\in Z^+\cup\{0\}$ ，則 $m=0,\dfrac{1}{4n},\dfrac{2}{4n},......,\dfrac{4n-1}{4n}$ ，

$$x=n+0,n+\frac{1}{4n},n+\frac{2}{4n},.....,n+\frac{4n-1}{4n}$$

$n=1,2,3,......,a-1$

$$x=[1+2+....+(a-1)]+1=2a^2-2a+1$$

［問題四］：因為 $\sum_{n=1}^{p-1}\frac{n+1}{n}$ 為分數，而 $a\,,b$ 為任意兩自然數，可令 b 為 p 的倍數，故得證。

［問題五］：因為 $a_n{}^2=1+3b_n{}^2$（歸納法證明）所以

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\sqrt{3}\right|=\left|\frac{\sqrt{1+3b_n{}^2}-\sqrt{3}b_n}{b_n}\right|$$

$$=\left|\frac{(\sqrt{1+3b_n{}^2}-\sqrt{3}b_n)(\sqrt{1+3b_n{}^2}+\sqrt{3}b_n)}{b_n(\sqrt{1+3b_n{}^2}+\sqrt{3}b_n)}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{b_n(\sqrt{1+3b_n{}^2}+\sqrt{3}b_n)}\right|<\frac{1}{b_n{}^2}$$