

九十五學年度高級中學數學科能力競賽試題（一）

南區（高屏區）

編號：_____

注意事項：

- (1)時間分配：2 小時
- (2)本試卷共五題，滿分 49 分。第一題 10 分，第二題 10 分，第三題 10 分，第四題 10 分，第五題 9 分。
- (3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (4)不可使用電算器。
- (5)試題與答案卷一同繳回。

[問題一]：過點 $(1, 2)$ 之直線交雙曲線 $xy = 1$ 於 P 、 Q 兩點，求線段 \overline{PQ} 之最小值。

[問題二]：設 x 與 y 為任意的實數，而其中 $y \geq 1$ 。已知 $y(y+1) \leq (x+1)^2$ ，試問 $y(y-1) \leq x^2$ 是否會成立？
(若不成立請舉出反例，若成立則需加以證明)

[問題三]：設 a 為正整數， x 為實數且滿足 $1 \leq x \leq a$ ，試求滿足方程式 $2x^2 - [2x^2] = 2(x - [x])^2$ 的解其個數有多少？
(註： $[b]$ 為不大於 b 的最大整數)。

[問題四]： p 為大於 2 的質數， a 和 b 為任意兩自然數，設 $\sum_{n=1}^{p-1} \frac{n+1}{n} = \frac{b}{a}$ 。求證 p 為 b 的因數。

[問題五]：設 $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ 且 $b_{n+1} = a_n + 2b_n, n = 1, 2, 3, \dots$ 。已知 $a_1 = 1, b_1 = 0$ 。

$$\text{試證 } \left| \sqrt{3} - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{(b_n)^2} \quad (n \geq 2)$$