

教育部九十四學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題 (二)

編號：_____

(學生自填)

(時間一小時)

注意事項：

1. 本試卷共六題填充題，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、若兩正整數 a 和 b 的最大公因數為 10，則 a^3 和 b^4 的最大公因數可能為何？_____。
(3分)

二、設 $N = 2^1 + 2^4 + 2^9 + 2^{16} + \dots + 2^{81} + 2^{100}$ 。若 N 以十進位表示出來是 a 位數且首位數字與個位數字分別為 b 與 c ，求 $a+b+c$ 之值。_____ (已知 $\log 2 = 0.3010$)
(3分)

三、設二次曲線 $\Gamma: 9x^2 + 16y^2 - 18x - 64y - 71 = 0$ 與直線 $L: 2x - 5y - 10 = 0$ ，若要在 Γ 上找一點 P 使得 P 到 L 的距離為最短，則 P 的坐標為何？_____
(3分)

四、有 6 個外表相同的袋子，其中有 4 個袋子各裝有 4 黑球及 1 白球，稱為 A 袋；其餘 2 個袋子各裝有 4 黑球及 6 白球，稱為 B 袋。今隨機選一個袋子並從中隨機取出兩球，若此兩球為一黑一白，試問此兩球來自 A 袋的機率有多少？_____
(4分)

五、一張紙 ABCD 是邊長為 1 的正方形，以 A 為圓心， \overline{AB} 為半徑，作一個四分之一圓弧 BD 。設 E 與 F 分別在 \overline{AB} 與 \overline{AD} 上，將這張紙對 \overline{EF} 對摺恰使得 A 落在圓弧 BD 上，求 $\triangle AEF$ 面積的最大值。_____
(4分)

六、對於任一正整數 n ， $\langle n \rangle$ 表示最接近 \sqrt{n} 的正整數，例如 $\langle 1 \rangle = 1$ ， $\langle 2 \rangle = 1$ ， $\langle 3 \rangle = 2$ 。
(4分)

設 k 為正整數，令 $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \langle n \rangle = k\}$ ，求 $\sum_{n \in A_k} n$ 之值 (以 k 表示出來)。_____