教育部九十四學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（一）　　編號：＿＿＿＿＿

（學生自填）

（時間二小時）

注意事項：

1.本試卷共五題，滿分為四十九分。

2.請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、 證明$\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}>1+\sqrt{3}+\sqrt{15}$，但不允許將這些根號數化成小數後再比較大小。
(9 分)

二、設k為大於 3 的正偶數，以下為x,y的聯立不等式：$y\geq\frac{2x}{3k-2},\ y\leq 2x+2k-2,$
(10 分)

$y\leq 2k,\ y\leq -2x+6k$，試問滿足以上聯立不等式的整數解(x,y)共有幾組？

三、設$P(x)=x^3+ax^2+bx+c$為一整係數多項式$(a,b,c$為整數$)$且$P(x)=0$的三個根分
(10 分)
別為u,v,w。若已知$a\neq 1$且$w=uv$，試證w必為整數。

四、 考慮以三角形為底的直立三角柱，假設其中的兩側面與底部的面積總和恆等於一
(10 分)
常數L。證明：這類三角柱達到最大體積時，這兩側面與底部三者的面積相等。

五、 下圖是一個由正三角形所構成的無限棋盤，棋子由棋盤上任一交叉點往相鄰的交
(10 分)
叉點移動稱為”走一步”，現在規定一個棋子的走法如下：一次走兩步，第一步可任選一個方向（有六個方向可供選擇），第二步的方向必須是第一步的方向逆時針轉60^o，下圖即顯示由 A 走一次可能走到$B_1,B_2,\cdots,B_5$或B_6。另外，我們定義圖中的兩個向量$\vec{a}=[1,0]$，$\vec{b}=\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$。證明：若棋子能由$P$點經若干次走到$Q$點，則$\overrightarrow{PQ}=m\vec{a}+n\vec{b}$，其中$m,n$是整數且$m-n$是 3 的倍數。