

**台灣省第四區(新竹區)九十四學年度
高級中學數學及自然科能力競賽 數學科筆試(一)試題**

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

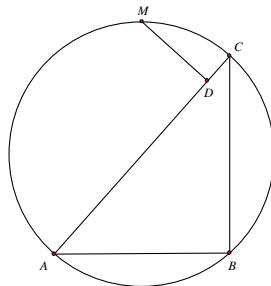
1. 本試卷共三題計算證明題，滿分 49 分，第一題 16 分，第二題 16 分，第三題(a)9 分，(b)8 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 不可使用計算器，請關閉手機電源。
5. 請將答案寫在答案卷內。

[問題一] 令 C_k^n 表示自 n 個相異物中取出 k 個的方法數。設數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{94}$ 滿足：對每一個 $n=1, 2, 3, \dots, 94$ ，以下的等式都成立

$$2005 \times C_1^{n+1} + a_1 \times C_2^{n+1} + a_2 \times C_3^{n+1} + \dots + a_n \times C_{n+1}^{n+1} = a_n \times 2^n$$

試證：數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{94}$ 為一等差數列。

[問題二] 如圖所示， \overline{AB} 、 \overline{AC} 為給定圓上的兩弦， M 為 \widehat{AMB} 中點，從 M 點向 \overline{AC} 作垂線的垂足為 D 。已知 $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$ ， $\overline{AC} = 9$ 且 $\overline{CB} \perp \overline{AB}$ ，試求線段 \overline{AD} 的長度。



[問題三] 設 Γ 為平面上拋物線，其準線垂直於 Y 軸，且開口朝上。

- (a) 假設原點是 Γ 的頂點，且自 X 軸上方遠處沿直線 $x = a$ ($a \neq 0$) 射出一雷射光束，經過拋物線 Γ 的兩次反射後，光束沿著直線 $x = b$ 射出。試證：不論 a 值為何， a 與 b 的乘積為定值。
- (b) 現假設 Γ 的頂點在 X 軸上(不一定為原點)。已知自 X 軸上方沿直線 $x = -5$ 射出的雷射光束，經過 Γ 的兩次反射後的光束是沿著直線 $x = 3$ 的方向射出；若入射光束所沿的直線是 $x = -4$ ，則經過 Γ 的兩次反射後的出射光束所沿的直線是 $x = 6$ 。試求拋物線 Γ 的焦點座標。