94 學年度高級中學數學科能力競賽複賽
北區第二區　筆試(一)【參考解答】

【問題一】：設n為一正整數，且滿足n^2-735是某整數的四次方，求n的所有可能值為何。

【解】：設a為自然數，且$n^2-735=a^4 \Rightarrow (n+a^2)(n-a^2)=735$

將 735 分解成兩正整數之積，得

n^2+a	735	245	147	105	49	35
n^2-a	1	3	5	7	15	21

$\Rightarrow (n, a^2) = (368, 367), (124, 121), (76, 71), (56, 49), (32, 17), (28, 7)$

所以(n, a)的所有可能為 $(124, 11), (56, 7)$

答：n所有可能為 124 與 56。

【問題二】：給定一個邊長為 1 的正四面體$ABCD$。設A'為A對於平面BCD的對稱點；

B'為B對於平面ACD的對稱點，M是$\overline{CD}$的中點。試求：

(1) $\Delta A'MB'$的面積；(2) 四面體$A'CB'D$的體積。(13 分)

【解】：(1) ΔACD為正三角形，所以$\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。　設$\dfrac{1}{2}\angle AMB=\theta$，

則$\sin\theta=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。$\angle A'MB'=6\theta$，

$\cos(\dfrac{1}{2}\angle A'MB')=\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{6}}{9}$，$3\theta$為鈍角。

$$\Delta A'MB'=\frac{1}{2}\overline{MA'}\,\overline{MB'}\sin(2\pi-6\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(-2\sin 3\theta\cos 3\theta)$$

$$=-\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{6}}{9}\sqrt{1-\frac{6}{81}}=\frac{5\sqrt{2}}{36}\text{。}$$

(2) $\overline{CD}\perp$平面$A'MB'$，所以體積為$\dfrac{1}{3}\Delta A'MB'\cdot\overline{CD}=\dfrac{5\sqrt{2}}{108}$。

【問題三】：設一直線L與一雙曲線相交於A, B兩點，並與該雙曲線之漸近線相交於C, D兩點。試證：$\overline{AC}=\overline{BD}$（13 分）

【證明】：設雙曲線為$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$，則其漸近線為$b^2x^2-a^2y^2=0$。

設直線L為$y=mx+k$，帶入雙曲線與其漸近線方程式得

$$b^2x^2-a^2(ma+k)^2=a^2b^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$b^2x^2-a^2(mx+k)^2=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

由 (1) 得$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2bmx-(a^2k^2+a^2b^2)=0$ $\cdots\cdots(3)$

由 (2) 得$(b^2-a^2m^2)x^2-2a^2bmx-a^2k^2=0$ $\cdots\cdots(4)$

(3) 與 (4) 中兩交點之中點的x座標均為$\dfrac{a^2bm}{b^2-a^2m^2}$。故得證。

【問題四】：給定實數$a\neq 0$。平面上點$P_n(x_n, y_n)$，$n=0,1,2,3,\cdots,$

滿足$\begin{cases}x_0=1+a\\ y_0=1-a\end{cases}$及$\begin{cases}x_{n+1}=2x_n+3y_n\\ y_{n+1}=3x_n+2y_n\end{cases}$ $\quad n=0,1,2,3,\cdots$。

試求$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\overline{OP_n}$之值。（$\overline{OP_n}$表示原點到點$P_n$的距離）

【解】：令$f(x,y)=\begin{bmatrix}2&3\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，則$(x_n, y_n)=f^n(x_0, y_0)$。

$$f(1,1)=\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ f(1,-1)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=(-1)\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}。$$

$\therefore (x_1, y_1)=5(1,-1)+a\cdot(-1)\cdot(1,-1)$，$(x_2, y_2)=5^2(1,-1)+a\cdot(-1)^2\cdot(1,-1)$

$\vdots$

$$(x_n, y_n)=5^n(1,-1)+a\cdot(-1)^n\cdot(1,-1)=(5^n+a\cdot(-1)^n, 5^n-a\cdot(-1)^n)$$

則$\overline{OP}=\sqrt{2\cdot 5^{2n}+2\cdot a^2}$。

所以
$$\frac{1}{n}\log\overline{OP_n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}\log(2\cdot 5^{2n}+2a^2)=\frac{1}{2n}\left[\log(5^{2n})+\log(2+\frac{2a^2}{5^{2n}})\right]$$

$$=\frac{1}{2n}\left[2n\cdot\log 5+\log(2+\frac{2a^2}{5^{2n}})\right]\to\log 5\ \text{ as }\ n\to\infty。$$