

**台灣省第二區九十四學年度
高級中學數學及自然科能力競賽
數學科筆試(一)試題**

編號：_____ (學生自填)

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將過程填寫在答案卷內。

【問題一】：設 n 為一正整數，且滿足 $n^2 - 735$ 是某整數的四次方，求 n 的所有可能值為何。(10 分)

【問題二】：給定一個邊長為 1 的正四面體 $ABCD$ 。設 A' 為 A 對於平面 BCD 的對稱點；
 B' 為 B 對於平面 ACD 的對稱點， M 是 \overline{CD} 的中點。試求：(1) $\Delta A'MB'$ 的面積；(2) 四面體 $A'CB'D$ 的體積。(13 分)

【問題三】：設一直線 L 與一雙曲線相交於 A, B 兩點，並與該雙曲線之漸近線相交於 C, D 兩點。試證： $\overline{AC} = \overline{BD}$ 。(13 分)

【問題四】：給定實數 $a \neq 0$ 。平面上點 $P_n(x_n, y_n)$ ， $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ，滿足 $\begin{cases} x_0 = 1 + a \\ y_0 = 1 - a \end{cases}$ 及

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 3y_n \\ y_{n+1} = 3x_n + 2y_n \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \text{。試求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \overline{OP_n} \text{ 之值。} (\overline{OP_n} \text{ 表示原點}$$

到點 P_n 的距離) (13 分)