台灣省第一區(花蓮區)九十四學年度
高級中學數學及自然科能力競賽 解答

筆試二：填充題

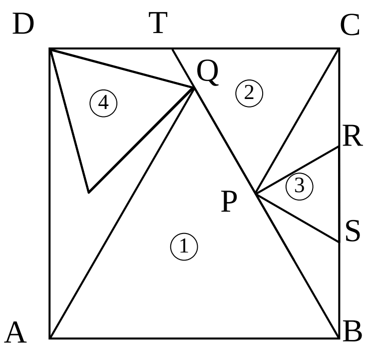
1、標記號如下圖所示：編號①的正三角形的邊長 $\overline{AB}$ 恰是正方形的邊長，因此

編號①的正三角形的邊長為 1。編號②的正三角形的邊長為 $\overline{TC}$，又三角形

BTC 為直角三角形且 $\angle TBC = 30^0$, $\overline{BC} = 1$。因此

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30^0 = \frac{\overline{TC}}{\overline{BC}} = \overline{TC}$$

即編號②的正三角形的邊長為 $\frac{\sqrt{3}}{3}$。



因為 $\angle CRP = 120^0, \angle PCR = 30^0$，所以 $\angle CPR = 120^0$，即三角形 PRC 為等腰

三角形，同理三角形 PSB 也是等腰三角形。因此 $\overline{CR} = \overline{RP} = \overline{PS} = \overline{SB}$ 是編號

③的正三角形邊長 $\overline{RS}$。所以 $1 = \overline{BC} = \overline{CR} + \overline{RS} + \overline{SB} = 3\overline{RS}$，即編號③的正三

角形邊長 $\overline{RS}$ 為 $\frac{1}{3}$。$(a,b) = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3})$

2、 $a_{59} = 55$

3、設首項為 a，連續 k 個正整數的和為 $n = \frac{(2a+k-1)k}{2} \geq \frac{k(k+1)}{2}$

由 $n \le 2005$ ，知 $2005 \ge \dfrac{k(k+1)}{2} \Rightarrow 60 \le k \le 62$

$k = 60 \Rightarrow n = 60a + 30\times 59 \le 2005 \Rightarrow a = 1,2,3 \Rightarrow n = 1830,1890,1950$

$k = 61 \Rightarrow n = 61a + 30\times 61 \le 2005 \Rightarrow a = 1,2 \Rightarrow n = 1891,1952$

$k = 62 \Rightarrow n = 62a + 31\times 61 \le 2005 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 1953$

ANS：6 個

4、圓心在 AB 的中垂線上，圓心為(1-a,3+a)，半徑為

$\sqrt{(1-a)^2 + (1+a)^2} = 3 + a \Rightarrow 2 + 2a^2 = 9 + 6a + a^2 \Rightarrow a = -1,7$

$\Rightarrow r = 2,10$

5、過第一關的機率為 2/3，過第二關的機率為 5/6；

某人連過前兩關的機率為 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{5}{6} = \dfrac{5}{9}$

6、因為 $P(n) = \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \dfrac{n(n-1)}{2} + 1$

所以 $P(7) = 57$